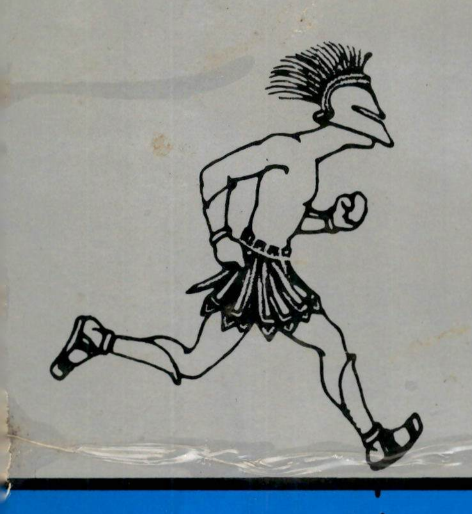
النهايات والاتصال

فى حساب التفاضل والتكامل

تأليف

ليڤيت







دار ماكجروهيل للنشر



الدار الدولية للنشر والتوزيع

۱۲ ـــ

② Differentiation by P. P. Korovkin

① Limits and Continuity by P. P. Korovkin

Published by Gordon And Breach

Sequences and combintorial problems by S. I. Gelfand et al.

Learn Limits Through problems the Sam author.

النهايات والاتصال

في حساب التفاضل والتكامل

النهايات والاتصال

فى حساب التفاضل والتكامل

تأليـــف

تيدى س . ج . ليفيت
أستاذ مساعد الرياضيات
بلاتسبيرج - نيويورك

ترجمـــة

أ . د . بولس بسيط روبل
د . مجدى مصطفى إمام
د . عبد اللطيف يونس يحيى
قسم الرياضيات - كلية العلوم
جامعة القاهرة

مراجعـــة

أ . د . بديع توفيق حسن
قسم الرياضيات - كلية العلوم
جامعة القاهرة



دار ماكجروهيل للنشر
الدار الدولية للنشر والتوزيع

حقوق النشـــر

الدار الدولية للنشر والتوزيع

ص . ب ٥٥٩٩ هليوبوليس - غرب القاهرة

تليفون : ٢٥٨٢٨٨٧

تلكس : ٢٠٨١٥ PBESC UN

مقدمة الناشر

المعرفة هى أصل الحضارة ،
والكلمة هى مصدر المعرفة ،
والكلمة المطبوعة هى أهم مكون فى هذا المصدر .

وقد كانت الكلمة المطبوعة ولا تزال أهم وسائل الثقافة والاعلام وأوسعها انتشاراً وأبقاها أثراً ، حيث حملت إلينـا حضـارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة صياغة حضاراتها وإضاءة الطريق بنور العلم والمعرفة .

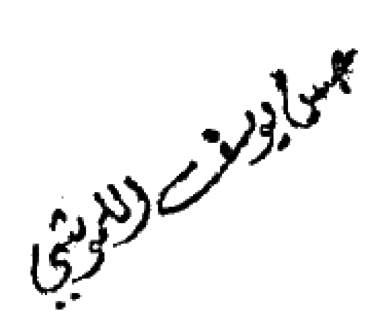
والكلمـة تبقى مجرد فكـرة لدى صاحبها حتى تتاح لها فرصة نشرها وترجمتها إلى لغات الآخرين ثم توزيعها ، وذلك وحده هو الذى يكفل لها أداء رسالتها .

وعـالم الكتب العلمية عالم رحب ممتـد الآفـاق ، متسـع الجنبـات ، والعلم لا وطن له ولا حدود ، ويوم يحظى القارىء العربى بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية لهو اليوم الذى تتطلع له الأمة العربية جمعاء .

والدار الدولية للنشر والتوزيع تشعر بالرضا عن مساهمتها فى هذا المجال بتقديم الطبعات العـربية للكتب العلمية الصـادرة عن دار ماكجـروهيل للنشر بمـوجب الإتفاق المبرم معها ، مستهدفة توفير احتياجات القارىء العربى أستاذاً وباحثاً وممارساً .

ومن جانب آخر فنحن نمد يدنا إلى الجامعات العربية والمراكز العلمية والمؤسسات والهيئات الثقافية للتعاون معنا فى إصدار طبعات عربية حديثة من الكتب والمراجع العلمية تخدم التقدم العلمى والحضارى للقارىء العربى .

والله ولى التوفيق .



محمد وفائى كامل
مدير عام
الدار الدولية للنشر والتوزيع

تقديـــم

يشتمل هذا الكتاب على دراسة للنهايات والاتصال ، وقد صمم بحيث يكون مكملا لكتب حساب التفاضل والتكامل القياسية . فى هذا الكتاب سنناقش النهايات والاتصال بعدة طرق مختلفة ، وذلك من منطلق أن القارىء يكتسب معرفة أفضل من خلال المقارنة .

وقد قدم مفهومى اتصال الدالة ونهاية المتتابعة قبل تقديم مفهوم نهاية الدالة . ويحدونا الأمل أن يكتسب القارىء قوة دافعة بدراسة هذه المفاهيم الأكثر سهولة بحيث لايفقد عندما يصل الى المفاهيم الصعبة كالجوار المثقوب ونقطة النهاية ونهاية الدالة ادراكه للنمط البسيط الذى يشكل أساس مفهوم النهاية .

وقبل اعطاء القارىء العديد من النهايات لحسابها ، سننص على حقيقة أنه إذا كانت د دالة متصلة عند نقطة ب من نقط مجالها ، فإن $\lim_{\text{س} \to \text{ب}} \text{د (س)} = \text{د (ب)}$. إذا طلب من القارىء حساب نهاية دالة ر غير متصلة عند ب ، فيمكنه أن يلجأ إلى مد مجال الدالة ر لاستنباط دالة جديدة د متصلة عند ب . نهاية هذه الدالة الجديدة يمكن حينئذ حسابها بالتعويض المباشر .

فمثلا ، اعتبر

$$\lim_{\text{س} \to \text{٣}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}}{\text{س} - \text{٣}} = \lim_{\text{س} \to \text{٣}} (\text{س} + \text{٣})$$

الدالـــة

$$\text{ر} = \{ (\text{س ، ص}) \mid \text{ص} = \text{س} + \text{٣} \text{ ، س} \in \text{ح} \}$$

امتداد بنقطة واحدة للدالة

$$\text{د} = \{ (\text{س ، ص}) \mid \text{ص} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}}{\text{س} - \text{٣}} \text{ ، س} \neq \text{٣} \}$$

الدالة ر متصلة عند $\text{س} = \text{٣}$ ، ومن ثم $\lim_{\text{س} \to \text{٣}} \text{ر (س)} = \text{ر (٣)}$.

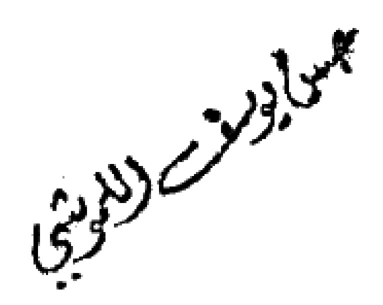
وستكون التمارين المبرمجة ، فى الغالب الأعم ، أقل صعوبة عن المادة الواردة بالكتاب . وسنقدم عادة كل موضوع متبوعا بتمارين مبرمجة . فمثلا ، يبدأ الباب الثانى بتمرين مبرمج ليس فى منتهى الدقة . بعد ذلك نعرف مفهومى الدالة والمتتابعة بدقة ونعطى المزيد من التمارين المبرمجة التى تتطلب مزيدا من الدقة والعناية .

لقد وجدنا أن التمارين المبرمجة فعالة فى تحصيل المعلومات وتثبيتها . فى جزء المنبه من الأطار ويلقن القارىء بحيث إذا قرأ ماهو مكتوب بعناية ، فسيصبح بامكانه أن يستجيب لما كان يقصده المبرمج . وكلما تقدم الكتاب ، فإننا سنستخدم الحاث المتتابع ، أى أن الأفكار من الأطر المتقدمة تستخدم كحاثة دون اعادة كتابتهم فى المنبه الخاص الذى يقتضى الأمر احتياجهم فيه .

ويجب أن يشجع القارىء على كتابة الاستجابية لكل اطار قبل التقدم الى الاطار التالى ، وذلك حيث أنه قد تبين أنه يجب على القارىء فى الحقيقة أن يقوم باعداد الاستجابية ليكتسب مهارة اقتصادية التعلم الناتج عن التوجيه المبرمج .

ويود المؤلف أن يتوجه بالشكر للعديد من الأشخاص الذين ساعدوه فى اعداد هذا الكتاب ، ويخص بالشكر جون اوتس ، وارين برينارد ، اليكس سيكالوس ، شيريل فيليبس الذين يعتبرون فى الواقع مشاركين فى التأليف .

تيدى س.ج. ليفيت



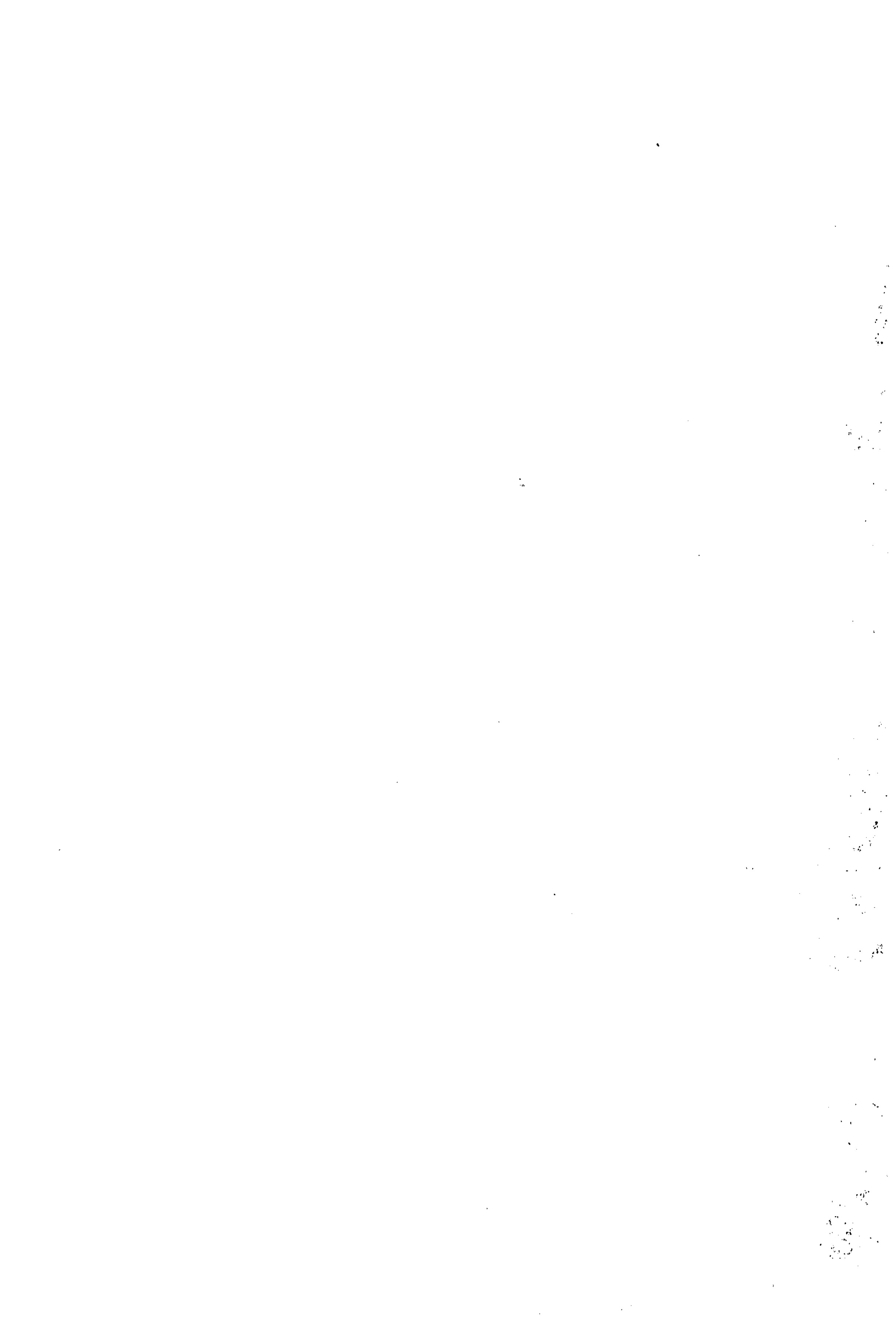
إلى القارىء

بالرغم من أنه يمكن قراءة الباب الأول دون أن يكون لدى القارىء أى معلومات مسبقة عن الرياضيات ، فإننا سنفترض ، كلما تقدمنا فى الكتاب ، أن القارىء قد درس ولديه الما كاف بالرياضيات المعتادة التى تدرس فى السنوات الأولى من المرحلة الثانوية . وحيث أن بعض القراء قد لا يكونوا قد درسوا المجموعات ، المتباينات ، أو القيمة المطلقة فقد الحقنا بنهاية الكتاب ملحقا يغطى هذه الموضوعات . إذا وجدت نفسك تائها أثناء قراءتك للكتاب فى أى لحظة من اللحظات ، فعليك بالرجوع إلى الملحق ، فستجد هناك فى الغالب ما تحتاج إليه من معلومات .

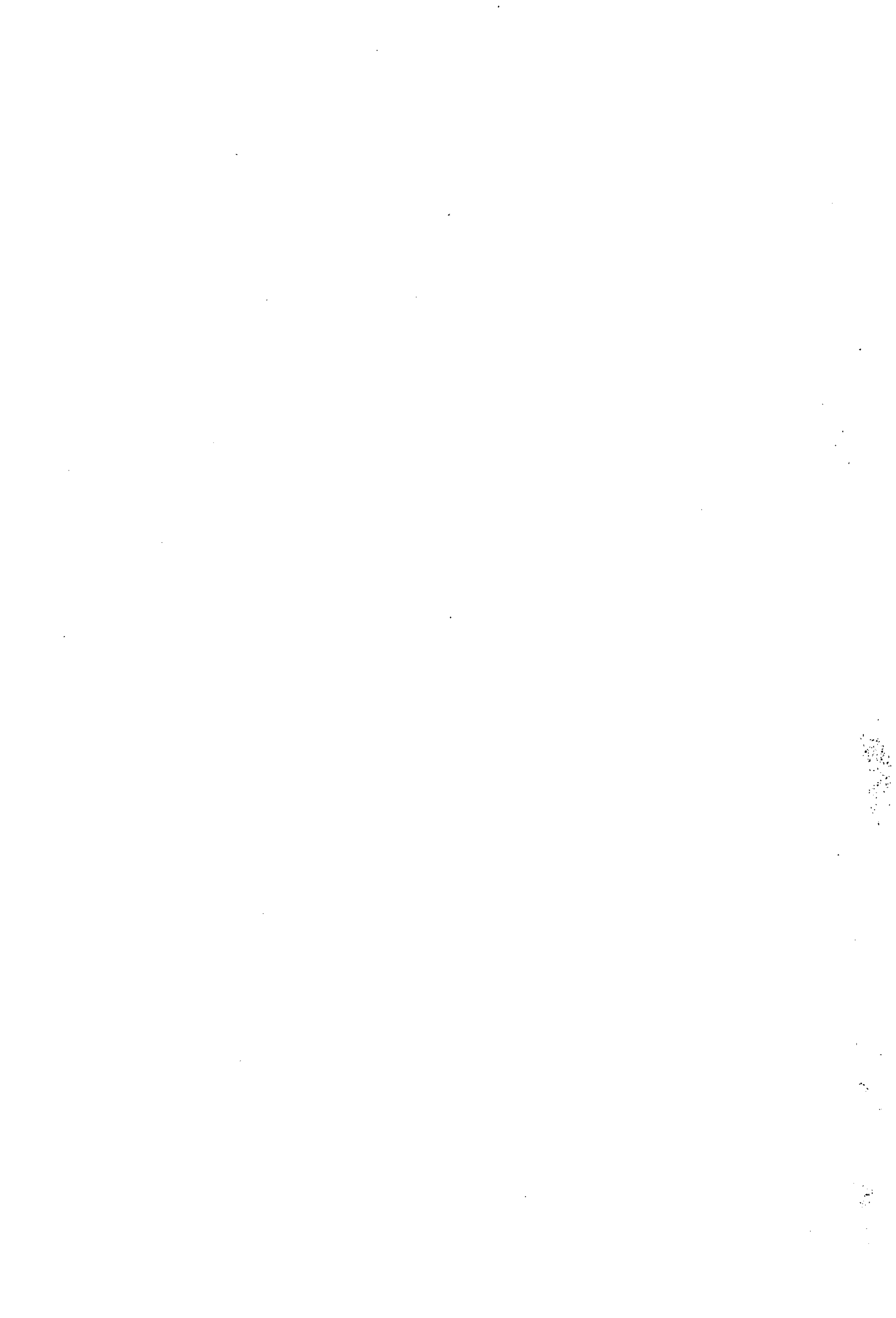
فى بداية الباب الثانى أدرجنا تمرينا مبرمجا . الأطر المبرمجة تتكون من جزئين .. الجزء الأول ، المنبه ، يشتمل على معلومات يجب على الطالب أن يتعلمها . الجزء الثانى ، الاستجابية النشطة ، عبارة عن تقرير لما يتوقع المؤلف أن يكتبه القارىء كاستجابية للمنبه .

غطى جزء استجابية الأطار ، أقرأ المنبه ، واكتب اجابتك . قارن بعد ذلك استجابيتك مع استجابيتنا .. من آن لآخر نبتعد قليلا عن الصيغة المبرمجة المقبولة بهدف داس بعض المعلومات فى جزء استجابية الأطار عندما نشعر انك على استعداد لتقبل الأفكار والمعلومات .

لقد استمتعنا كثيرا بكتابة هذا الكتاب ونأمل أن تجده ممتع لك أيضا ومشوق ومفيد .



المحتـــــويات



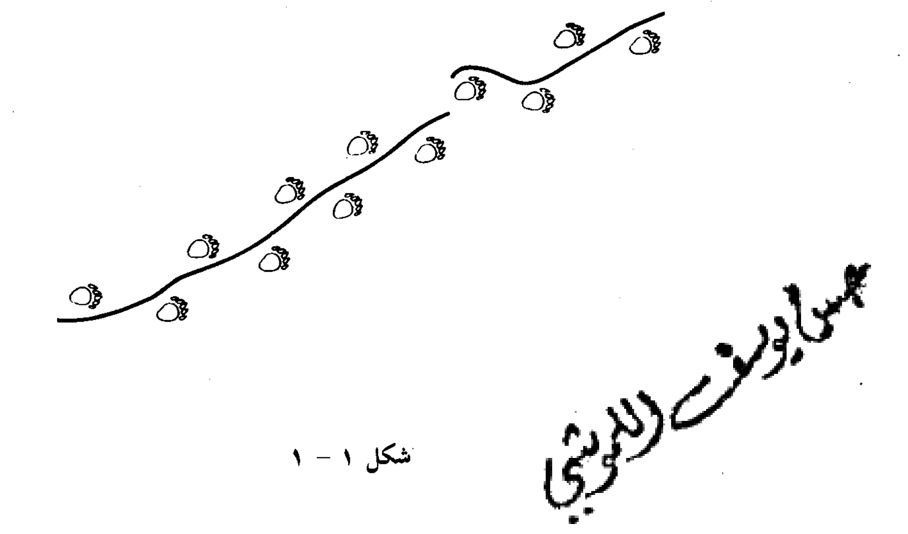
الباب الأول

مدخل حدسى للاتصال

تمر بعض المفاهيم الأساسية دون أن تلاحظ لعدة قرون ثم تُعرض بعد ذلك على أنها إكتشافات عظيمة . بينما تظل أفكار أخرى معروفة وتعتبر واضحة لعدة سنين ولكنها تأخذ معنى جديداً حين تُعرَّف وتستكشف .

حين لاحظ إنسان الكهف الأثر الذى تتركه الحيوانات ، رأى أن الحيوان الذى له ذيل ثقيل كثيرا ما يترك خطا « متصلا » بين بصمات أقدامه ، حين كان يسحب ذيله على امتداد الأرض . وإذا رفع الحيوان ذيله إلى اليسار تكون النتيجة « عدم إتصال » فى الأثر الذى يتركه الذيل (أنظر شكل ١ - ١)

قد يبدو من غير المصدق أن مثل هذا المفهوم البسيط الذى قبله الانسان الأول دون تمحيص ، يمكن أن يصبح موضوع دراسة لرياضيين عظام ، بل إن رجالا ذوى عبقرية رياضية لا ريب فيها قضوا حياتهم كاملة في دراسة الاتصال وموضوعات متصلة به . وفى الحقيقة فإن هذا المفهوم ، بعد التعريف الرياضى الدقيق له وإعادة التعريف ، قد أثمر مجرة كاملة من النجوم الرياضية . ويذهب بعض الرياضيين بعيداً إلى حد التأكيد بأن العملاق الضخم الحديث المسمى « توبولوجيا » هو ببساطة دراسة للإتصال . Topology



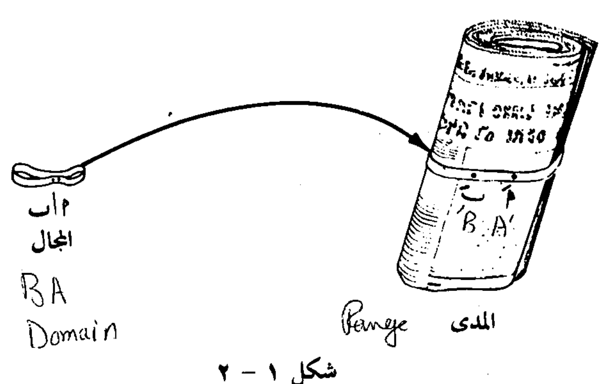
شكل ١ - ١

ويختلف المفهوم الرياضى للإتصال عن مفهوم سلفنا البدائى الذى كان ، كبعض الناس فى زماننا هذا ، يعتبر أن تدفق الماء فى النهر متصلا . إننا سنعتبر أن هذا التدفق غير متصل . لقد قيدنا تعليمنا السابق بأن نفكر مباشرة فى القرب بين النقط حين نفكر في الاتصال . ولا يمكن أن يسمى تدفق الماء متصلا إلا إذا « ظل » الجزيئان القريبان من بعضهما البعض عند المنبع قريبين من بعضهما البعض بعد ذلك . وعلى هذا فإن تدفق الماء في نهر المسيسبي ليس متصلا لأن جزيئين من الماء قريبين من بعضهما فى مينيسوتا قد يفصلهما أى عدد من السبل قبل وصولهما إلى نيوأورليانز .

وإذا كنا سنظل على إصرارنا في إستخدام هذه الطريقة لتعيين الاتصال ، فإننا على مايبدو لن نعتبر أى شيء متصلا . ولكن ، حتى حين يبدو وكأننا قد حددنا وهيأنا أنفسنا على عدم إمكانية العثور على أى شيء متصل ، لا زال يوجد فى كل مكان وفرة هائلة من الاتصال . أن العمل البسيط المتمثل فى مط رباط من المطاط ولفه حول صحيفة ما هو إلا تحويل متصل .

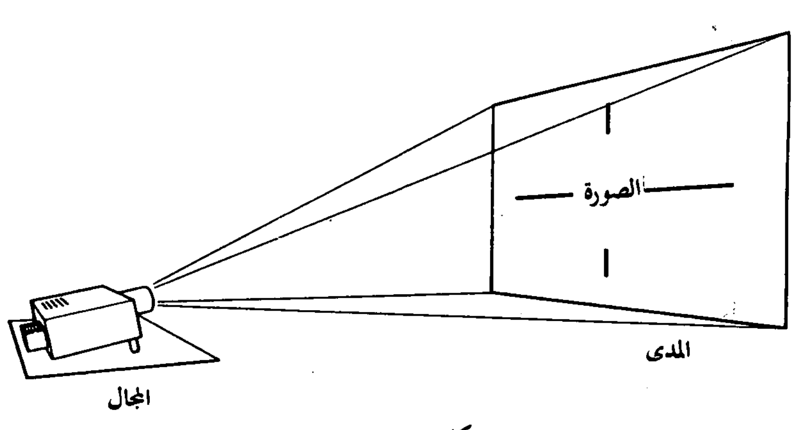
فإن النقطتين ﺃ ، ب القريبتين من بعضهما حين كان الرباط غير ممطوط (شكل ١ – ٢) لا زالتا قريبتين من بعضهما نسبيا حين أصبح رباط المطاط ملفوفا حول الصحيفة . يسمى مط رباط المطاط ولفه حول الصحيفة « **تحويلا متصلا** » من النقط على الرباط غير الممطوط (« **مجال** » التحويل) إلى النقط على الرباط الملفوف حول الصحيفة (« **مدى** » التحويل) .

والآن سنقدم ، آخذين فى الحسبان المخاطرة بتعتيم بساطة هذه الفكرة ، حرفى هجاء أغريقيين ε (إبسيلون) ، δ (دلتا) . إذا استطال رباط المطاط حتى أصبح فى المدى (على الصحيفة) ضعف ما كان عليه فى المجال (غير الممطوط) ، نقول « لكل ε توجد $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ بحيث أن كل نقطة فى المجال قريبة فى حدود δ من ﺃ تتحول إلى نقطة فى المدى قريبة فى حدود ε من ﺃ َ » .ونعنى بكل هذه الاغريقية : أنه إذا كانت نقطة ما تبعد مسافة فى حدود $\frac{1}{2}$ بوصة عن النقطة ﺃ على الرباط حين كان غير ممطوط فإنها ستبعد مسافة فى حدود بوصة واحدة عن النقطة ﺃ َ حين يكون رباط المطاط ملفوفا حول الصحيفة .



شكل ١ – ٢

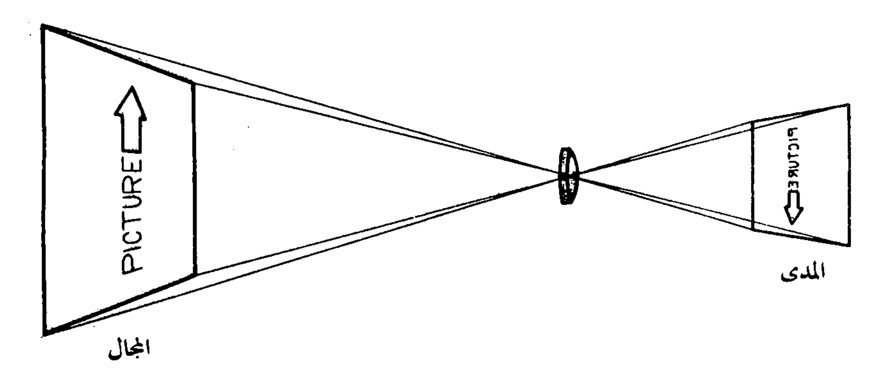
ولم لا نتحدث بالعربية ؟ . نظراً لتقيدنا بالكتابات السابقة عن الاتصال ، والتى أصبحت فيها لغة إبسيلون ــ دلتا لغة قياسية ، نجد من الطبيعى أكثر أن نتحدث بهذه الطريقة الدقيقة بدلا من إستخدام لغة لا رياضية غير دقيقة . والمأمول أن يجد القارىء أيضا عند إكمال هذه الدراسة أن لغة δ ، ε أسهل فى الفهم والاستخدام .



شكل ١ - ٣

إن أى تناظر بين مجال ومدى يمكن إختباره من حيث الاتصال إذا كانت هناك طريقة سلسة وواضحة لوصف القرب . إن جهاز إسقاط الشرائح مثال على إبتكار يمكنه إستحداث تحويلات متصلة . فهو يسقط نقط شريحة (المجال) فوق نقط على شاشة (المدى) (شكل ١ — ٣) . فالنقطتان اللتان يفصل بينهما بوصة واحدة ، مثلا ، على الشاشة هما صورتان لنقطتين يفصل بينهما $\frac{١}{١٠٠}$ من البوصة على الشريحة . إذا أعطينا قربا فى حدود ε فى المدى فإنه يمكننا حساب قرب فى حدود δ فى المجال بحيث أن أى نقطتين قريبتين فى حدود δ فى المجال تصبحان قريبتين فى حدود ε فى المدى . إننا نسمى هذا الإسقاط « **راسماً متصلا** » (تحويل) لنقط الشريحة فوق نقط الشاشة . وهنا $\delta = \frac{١}{١٠٠}\varepsilon$.

ومن جهة أخرى ، إذا كانت لدينا صورة ونرغب فى الحصول على نسخة مصغرة منها ، فإنه يمكننا تصميم منظومة من العدسات (شكل ١ — ٤) تقوم باسقاط صورة مصغرة . ومرة أخرى يمكن الحصول على قرب فى حدود ε فى المدى بتوصيف قرب قابل للحساب فى حدود δ فى المجال . فمن الممكن أن تنتج نقطتان يفصلهما $\frac{١}{١٠٠}$ من البوصة فى المدى من نقطتين يفصل بينهما $\frac{١}{١٠}$ من البوصة فى المجال ، وفى هذه الحالة تكون δ عشرة أضعاف ε . تذكر أنه فى المثال الأول كانت δ تساوى $\frac{١}{١٠٠}$ فقط من ε .

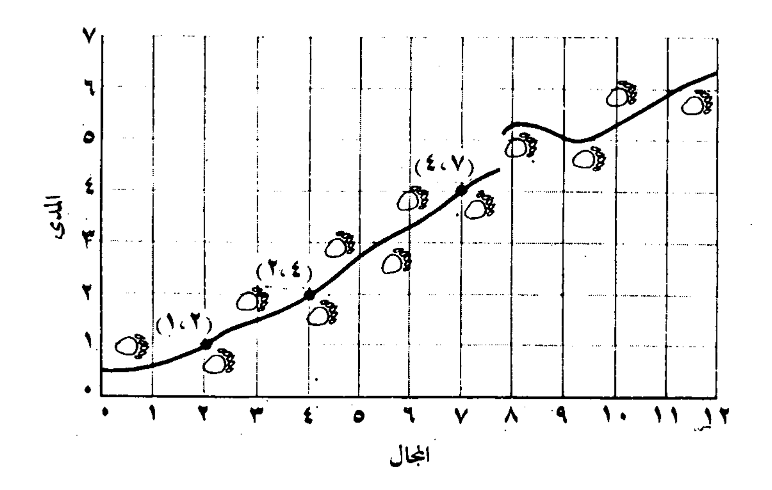


شكل ١ – ٤

والشيء الهام فى كلا المثالين هو أن هناك طريقة « لحساب » القرب فى المجال لأى قرب معطى فى المدى . ولا يهم إطلاقا ما إذا كانت النقط فى المدى أكثر قربا أم أكثر بعدا من بعضها عنها فى المجال .

إننا نسمى الأشياء الموجودة فى الواقع متصلة إذا لائمت نموذجنا لها بطريقة دقيقة . والاتصال تجريد لا ينطبق مباشرة على الواقع وإنما على نموذج للواقع . وبتعيين رموز معينة لتمثيل المجال والمدى والتحويل يمكننا أن نقرر ماإذا كان نموذجنا متصلا أم لا .

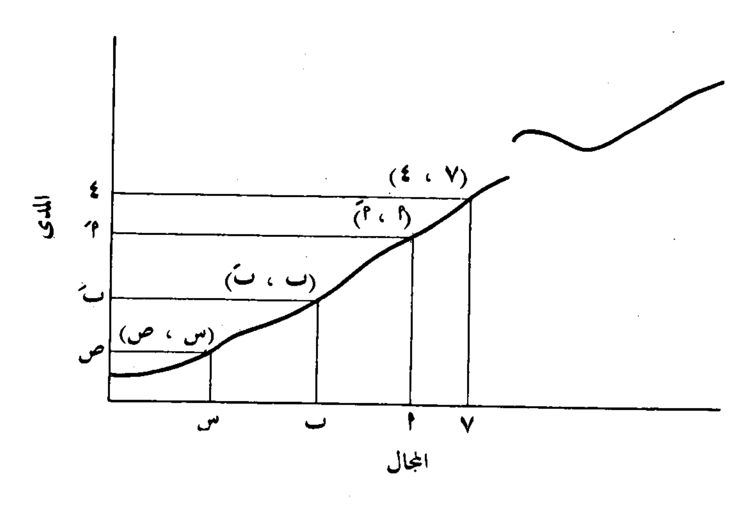
إن أثر الحيوان الذى اعتبره انسان الكهف متصلا ، متصل أيضا بالمعيار الرياضى . فإننا نستطيع تعريف مجال ومدى معينين بحيث تنقل أو ترسم النقط القريبة من بعضها البعض فى المجال إلى نقط قريبة من بعضها البعض فى المدى .



شكل ١ – ٥

ففى شكل ١ – ٥ يمثل المدى بالخط الرأسى على اليسار ، ويمثل المجال بالخط الأفقى أسفل الأثر . وسنعتبر أن الخط الذى يصنعه الذيل مكون من عدد لا نهائى من النقط التى يمثل كل منها بزوج مرتب (س ، ص) . فمثلا ، أفرض أن هناك نقطة على الأثر تبعد بمقدار وحدتين إلى اليمين من الخط الممثل للمدى وبمقدار وحدة واحدة أعلى الخط الممثل للمجال . يرمز لهذه النقطة بالزوج المرتب(٢ ، ١). والنقطة (٤،٢) تبعد بمقدار أربع وحدات إلى اليمين من الخط الممثل للمدى وبمقدار وحدتين أعلى الخط الممثل للمجال .

فى شكل ١ – ٦ يمكن النظر إلى النقطتين ٲَ ، بَ فى المدى على أنهما مناظرتين للنقطتين ٲ ، ب فى المجال ، كما أن (ٲ ، ٲَ) ، (ب ، بَ) هما النقطتان على الأثر اللتان تمثلان تحويل ٲ إلى ٲَ ، ب إلى بَ . أن النقطة (س ، ص) من الأثر ترسم (تنقل) س فى المجال إلى ص فى المدى . النقطة (٧ ، ٤) تقع على الأثرَ ، ولذا فإن النقطة ٧ فى المجال ترسم إلى النقطة ٤ فى المدى .

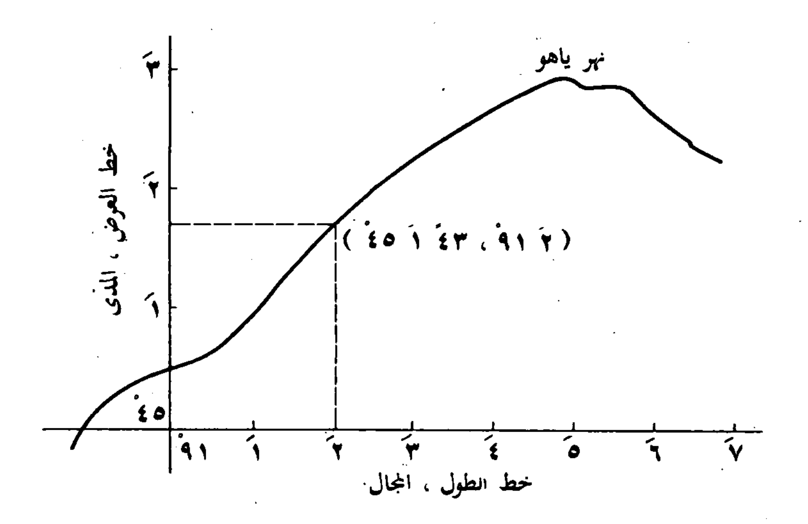


شكل ١ – ٦

من الضروري أن نوضح ما هية ذلك الذى نسميه متصلا . أن « **التحويلات** » هى فى الحقيقة الأشياء الوحيدة التى يمكن أن تعتبر متصلة أو غير متصلة . وإذا تكلمنا عن نقل النقط على رباط المطاط من موضع لآخر فإننا نسمى هذا التحويل متصلا لأن النقط القريبة من بعضها البعض فى المجال تنقل إلى نقط قريبة من بعضها البعض فى المدى . وتدفق الماء فى نهر غير متصل لأن جزيئين قريبين الواحد من الآخر فى مجال التحويل (عند المنبع) قد « **لا** » يكونان قريبين الواحد من الآخر فى المدى (عند المصب) . وفى الحقيقة فأنه بسبب التبخر أو أي حيود آخر قد لا تنقل بعض الجزيئات سوى جـزءا من الطريق إلى مصب النهر .

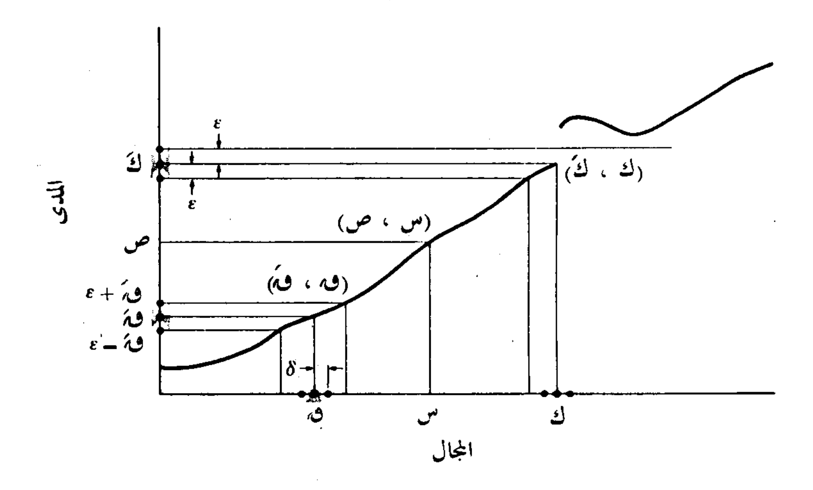
ومن جهه أخرى ، فإن الرسم البياني لنهر على خريطة قد يكون ممثلا لتحويل متصل لنقط فى المجال (خط الطول) إلى نقط فى المدى (خط العرض) (شكل ١ – ٧) . وبعبارة أخرى فلكى نستطيع اعتبار منحنى ما متصلا أم غير متصل يجب أولا أن نعرف مجالا ومدى ثم نحلل التحويل لكى نرى ما إذا كانت النقط القريبة من بعضها البعض فى المجال ترسم إلى نقط قريبة من بعضها البعض فى المدى .

نفس الشيء ينطبق على تفسير أثر الحيوان . إننا لا نعتبر النقط على الذيل كما لو كانت تنقل من مكان إلى آخر ، وإنما نناقش انتقال نقط من المجال الذى انشأناه إلى نقط من المدى الذى أنشأناه .



شكل ١ – ٧

العملية المستخدمة لإيجاد نقطة المدى التى هى صورة للنقطة س فى المجال تتمثل فى رسم خط رأسى إلى أعلى بدءًا من س إلى أن يلتقى بالأثر فى نقطة ثم رسم خطا أفقياً من نقطة التقاطع هذه إلى اليسار حتى يتقاطع مع المدى . وتسمى النقطة ص التى يتقاطع عندها الخط الأفقى مع المدى « **صورة** » س ، كما تسمى س « **أصل الصورة** » ص . ويرمز للنقطة على الأثر بالزوج المرتب (س،ص) . ويمكن النظر إلى الأثر على أنه يتكون من مجموعة من الازواج المرتبة .

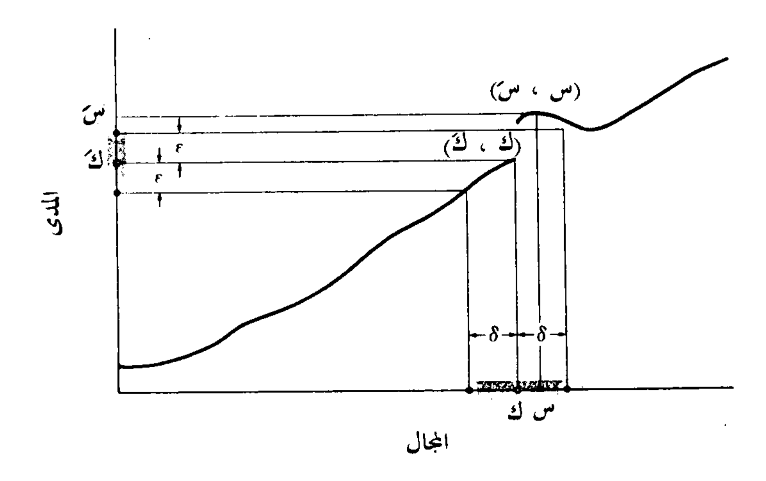


شكل ١ – ٨

ففى شكل ١ – ٨ ، ترسم كل النقط القريبة من ق إلى نقط قريبة من قَ ، ولكن ليس كل النقط القريبة من ك ترسم إلى نقط قريبة من كَ . لقد رفع الحيوان ذيله عند النقطة (ك ، كَ) ؛ وبالتالى ، فالنقط القريبة من ك على يسارها ترسم إلى نقط قريبة من كَ ، أما النقط القريبة من ك على يمينها « **فلا** » ترسم إلى نقط قريبة من كَ . فيما عدا عند النقطة ك من نقط المجال ، يمكننا القول بأن الأثر متصل . ونعنى بهذا أن التحويل المستحدث بالأثر متصل عند جميع نقط المجال فيما عدا عند ك .

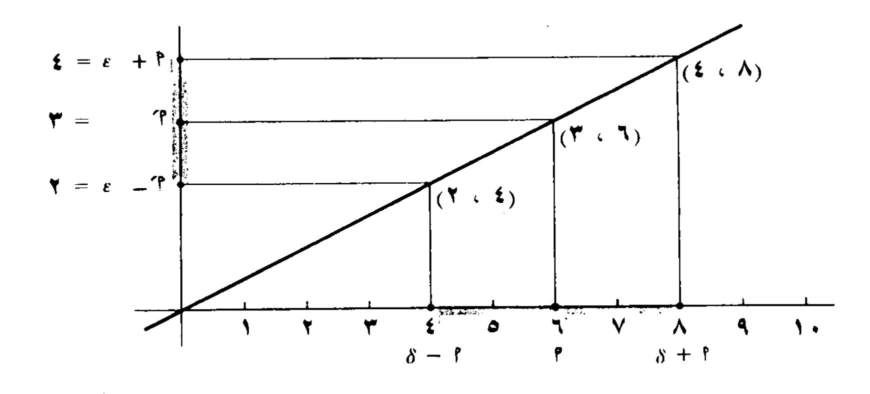
يستخدم كل صندوق مقعر صغير (شكل ١ – ٨) فى المجال والمدى لتمثيل مجموعة النقط الواقعة فى حدود قرب معين من النقطة الواقعة عند مركزه . هذه الصناديق المقعرة (فترات مفتوحة) تمثل جوارات أحادية البعد . والنقطة فى مثل هذا الصندوق تقع فى حدود مسافة معينة ε أو δ من النقطة الواقعة عند مركزه .

إذا رسمنا خطا رأسياً إلى أعلى من نقطة س قريبة من ك على اليمين كما فى شكل ١ – ٩ ، فإننا لا نصل إلى الأثر إلا بعد أن نصبح أعلى بكثير من النقطة (ك ، كَ) . وبالتالى ، فحين نرسم الخط الأفقى الموجه إلى المدى فإنه يقطع المدى عند نقطة خارج جوار ما للنقطه كَ نصف قطره ε . ما لم نكن ، « **لأى** » عدد حقيقى موجب ε ، قادرين على إيجاد قرب فى حدود δ من ك بحيث ترسم كل النقط فى جوار للنقطة ك نصف قطره δ إلى جوار للنقطة كَ نصف قطره ε محدد سلفا ، فإننا سنقول أن الأثر غير متصل عند النقطة ك .



شكل ١ – ٩

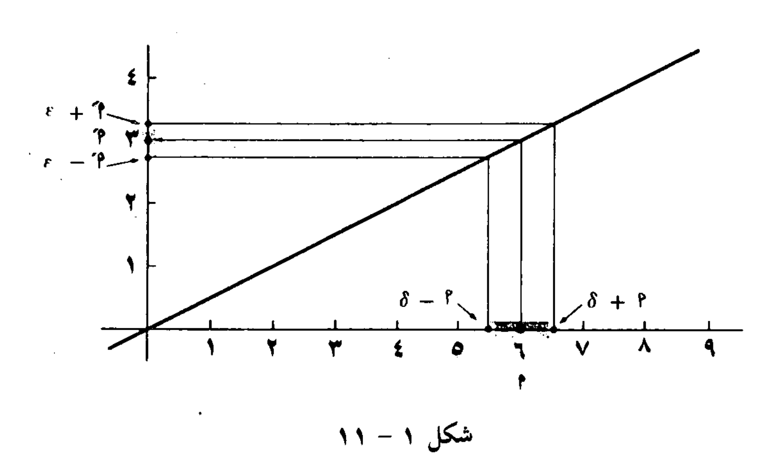
ففى شكل ١ – ٨ ، أى نقطة داخل جوار النقطة ه الذى نصف قطره δ ترسم إلى نقطة « **أقرب** » إلى هَ عنها من النقطة هَ + ε أو النقطة هَ – ε . لقد إتفقنا على أن هذا يعنى أنه إذا رسمنا خطا رأسياً إلى أعلى من أى نقطة تنتمى لجوار النقطة ه الذى نصف قطره δ حتى يلتقى بالأثر ثم رسمنا خطا أفقياً إلى المدى ، فإن الخط الأفقى يقطع المدى فى نقطة ما تنتمى لجوار النقطة هَ الذى نصف قطره ε . ويكون الأثر متصلا عند ه إذا كان لكل جوار للنقطة هَ نصف قطره ε يوجد جوار للنقطة ه نصف قطره δ بحيث أن كل نقطة من نقط جوار النقطة ه ترسم إلى نقطة تنتمى لجوار النقطة هَ .



شكل ١ – ١٠

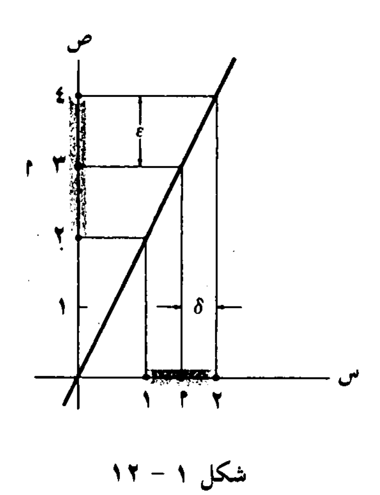
الآن ، وبعد أن قدمنا الأفكار الأساسية عن مفهوم الاتصال ، يمكننا إلقاء نظرة أكثر تمحيصا على عدد من المقولات التى كانت موضع نقاشنا . إن الرسم البيانى البسيط فى شكل ١ - ١٠ يمثل مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية (س، ص) حيث ص = $\frac{١}{٢}$ س . إنه تحويل يتطلب فيه القرب فى حدود ε ، حيث ε تساوى وحدة طول واحدة ، فى المدى قربا فى حدود δ ، بحيث لا تزيد δ عن وحدتين من وحدات الطول فى النطاق . وهذا يكافىء القول بأن أى نقطة تنتمى لجوار للنقطة م نصف قطره وحدتى طول سترسم إلى نقطة تنتمى إلى جوار للنقطة مَ نصف قطره وحدة طول فى ظل المعادلة ص = $\frac{١}{٢}$ س .

ولكن إذا تطلب الأمر أن نكون فى حدود ε = $\frac{١}{٤}$ ، فيجب أن نختار δ < $\frac{١}{٢}$ لضمان أن كل شىء فى الجوار الذى نصف قطره δ سيرسم إلى الجوار الذى نصف قطره ε (شكل ١ - ١١) .



شكل ١ - ١١

فئة الأزواج المرتبة (س، ص) حيث ص = ٢ س مثال لدالة أخرى متصلة (شكل ١ - ١٢) . إننا ننظر إلى هذه الدالة كتحويل يرسم النقط من مجال الأعداد الحقيقية إلى مدى الأعداد الحقيقية . لكل قرب فى حدود ε فى المدى يوجد قرب فى حدود δ فى المجال بحيث أن أى نقطة قريبة فى حدود δ من هذه النقطة فى المجال ستكون قريبة فى حدود ε من صورتها فى المدى . لهذه الدالة يجب ألا تزيد δ عن نصف مقدار ε .



شكل ١ - ١٢

خلال هذه الدراسة لن تكون ε ، δ أبدا أعدادا سالبة ، إنها ستكون دائما أعدادا حقيقية موجبة « وبالتالى **فإن ε ، δ لن تساوى الصفر إطلاقاً** » .

الباب الثانى

نهاية المتتابعة

التمارين المبرمجة التالية مقدمة استكشافية للمتتابعات . وهى تشكل خبرة من طراز « **بلل قدميك قبل الخوض فى الماء** » ، ستساعدك على السباحة خلال بقية الباب .

تنقسم التمارين المبرمجة إلى أقسام تسمى أطرا . وكل إطار يتكون من جزئين رئيسيين . يسمى الجزء الأول « **المنبه** » ويسمى الثانى « **الاستجابية** » . وتفصل بين هذه الأجزاء قطع مستقيمة أفقية قصيرة . ومن المهم أن تستخدم الأسلوب التالى مع كل إطار :

١ – قم بإخفاء جزء استجابية الإطار ببطاقة .
٢ – أكتب استجابيتك للمنبه على صحيفة من الورق .
٣ – قارن استجابيتك باستجابية المؤلف .

ويمكن بطبيعة الحال أن يحاول الشخص توفير الوقت بتخمين الاستجابية ببساطة بدلا من كتابتها . وهذا حسن إذا استطاع الشخص أن يكون صادقا مع نفسه ، ولكن ما أسهل أن يقرأ الشخص استجابية المؤلف ثم يقول « **حسن ، هذا هو ما خمنته** » . إذا كتبت استجابيتك الخاصة بك ، فإنه يمكنك مراجعة الفروق الدقيقة بين استجابيتك المكتوبة واستجابية المؤلف . فكثيرا ما تكون هذه الفروق ذات مغزى كبير .

٢ – ١ : إذا قسمنا ١ على كل عدد من الأعداد الطبيعية ، أى على كل عدد صحيح موجب ، فإننا نحصل على قائمة لا نهائية من الأعداد الحقيقية تسمى متتابعة : ($\frac{١}{١}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ...)

كون متتابعة بقسمة ٢ على كل عدد من الأعداد الطبيعية .

($\frac{٢}{١}$ ، $\frac{٢}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٤}$ ، ...) . النقط الثلاث يمكن قراءتها « وهكذا »

---

٢ – ٢ : $\frac{١}{١}$ هو الحد الأول من المتتابعة ($\frac{١}{١}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ...) ، $\frac{١}{٩}$ هو الحد التاسع .

ما هما الحدان الأول والتاسع من المتتابعة التى كونتها فى ٢ – ١ ؟

$\frac{٢}{١}$ ، $\frac{٢}{٩}$

---

٢ – ٣ : $\frac{١}{ن}$ هو الحد العام للمتتابعة ($\frac{١}{١}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ...) .

ما هو الحد العام للمتتابعة ($\frac{٢}{١}$ ، $\frac{٢}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ...) ؟

$\frac{٢}{ن}$

---

٢ - ٤ : يمكن وصف المتتابعة بحدها العام . فيمكن تمثيل المتتابعة ($\frac{١}{١}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ...) بالرمز ($\frac{١}{ن}$) . كيف تمثل المتتابعة ($\frac{٢}{١}$ ، $\frac{٢}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ...) ؟

($\frac{٢}{ن}$) . تستخدم الأقواس للإشارة إلى أن هذه متتابعة وليس مجرد الحد العام .

---

٢ - ٥ : أكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة ($\frac{٣}{ن}$) .

$\frac{٣}{١}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٣}$

---

٢ - ٦ : أكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتابعة ($\frac{١}{ن^٢}$) .

$\frac{١}{١}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{١٦}$

---

٢ - ٧ : تمثل المتتابعة (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ...) بالرمز ($ن^٣$) . ويمثل الحد العام لهذه المتتابعة بالرمز $ن^٣$ دون أقواس . أكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتابعة ($ن^٣$ + ١) وأذكر حدها العام .

---

٢ ، ٩ ، ٢٨ ، ٦٥ هى الحدود الأربعة الأولى . (٢ ، ٩ ، ٢٨ ، ٦٥ ، ... ، $ن^٣$ + ١ ، ...) هى المتتابعة . $ن^٣$ + ١ هو الحد العام .

---

٢ - ٨ : ما هو الحد العام للمتتابعة ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، ...) ؟

$\frac{١}{٢^ن}$ أو $(\frac{١}{٢})^ن$.

---

٢ - ٩ : يمكن للمتتابعات أن تأخذ صورا أخرى كثيرة . ($\frac{ن^٢}{ن + ١}$) هى المتتابعة ــــــ

($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{١٦}{٥}$ ، ...)

---

٢ - ١٠ : فى المتتابعة ($\frac{١}{ن}$) كل حد أصغر من الحد السابق له . الحد رقم ١٠٠ هو ــــ والحد رقم ١٠٠٠ هو ــــ . الحد رقم ١٠٠٠٠٠١ يكون (أكبر ، أصغر) من الحد رقم ١٠٠٠٠٠٠ .

$\frac{١}{١٠٠}$ ، $\frac{١}{١٠٠٠}$ ، أصغر .

---

٢ - ١١ : إذا مثلنا المتتابعة ($\frac{١}{ن}$) بيانيا ، نلاحظ أن كل جوار للصفر يحتوى عددا لا نهائيا من حدود المتتابعة . فى الحقيقة كل جوار للصفر يحتوى « **جميع** » حدود المتتابعة ($\frac{١}{ن}$) « **فيما عدا عدد محدود منها** » .

جميع حدود المتتابعة ($\frac{١}{ن}$) فيما عدا عدد محدود منها تقع على بعد فى حدود $\frac{١}{١٠}$ من الصفر .

١/٢ ، ١/٤ ، ١/٦ ، ١/٨ ، صفر

١/٣ ، ١/٥ ، ١/٧ ، ١/٩ ، ١/١٠

جميع حدود المتتابعة (١ + ١/ن) فيما عدا عدد محدود منها تقع على بعد فى حدود ١/١٠ من ١ .

٣/٢ ، ٥/٤ ، ٧/٦ ، ٩/٨

٤/٣ ، ٦/٥ ، ٨/٧ ، ١٠/٩ ، ١

جميع حدود المتتابعة (٢ + ١/ن) فيما عدا عدد محدوَد منها تقع على بعد فى حدود ١/١٠ من ٢ .

٥/٢ ، ٩/٤ ، ١٣/٦ ، ١٧/٨

٧/٣ ، ١١/٥ ، ١٥/٧ ، ١٩/٩ ، ٢

إذا احتوى كل جوار لعدد حقيقى ل جميع حدود متتابعة فيما عدا عدد محدود منها فإننا نقول أن ل نهاية المتتابعة . نهاية المتتابعة (١ + ١/ن) هى ١ لأن كل جوار للعدد ١ يحتوى جميع حدود المتتابعة (١ + ١/ن) فيما عدا عدد محدود منها .

ماهى نهاية المتتابعة (٢ + ١/ن) ؟ .

٢

---

٢ – ١٢ : البعد بين الحدين السابع والثامن من حدود المتتابعة (١/ن) هو ١/٧ – ١/٨ = ١/٥٦ .

ماهو الفرق بين نهاية هذه المتتابعة وحدها رقم المليون ؟

١/١٠٠٠٠٠٠ – صفر = ١/١٠٠٠٠٠٠ .

---

٢ – ١٣ : تزداد حدود المتتابعة (١/ن) قربا على التوالى من بعضها البعض . إن قرب ١/٦ إلى ١/٨ أكثر من قرب ١/٤ إلى ١/٢ لأن ١/٤ – ١/٨ = ١/٨ أصغر من ١/٢ – ١/٤ = ١/٤ .

ما هو أكبر بعد بين حدين متتاليين من حدود المتتابعة (١/ن) ؟

١/٢

---

٢ – ١٤ : بأخذ ن = ١٠٠٠٠٠٠ يمكننا أن نقول أن لكل الأعداد الطبيعية ں الأكبر من ن تكون حدود المتتابعة ($\frac{١}{ں}$) (أقرب إلى ، أبعد عن) الصفر من $\frac{١}{ن}$.

أقرب إلى

---

٢ – ١٥ : يوجد عدد (لانهائى ، محدود) من حدود المتتابعة ($\frac{١}{ں}$) التى تقع على بعد فى حدود ٠,٢ من الصفر . ما هو الحد الأكبر فى المتتابعة الذى يكون أقرب للنهاية من ٠,٢ ؟

صفر $\frac{١}{٩}$ $\frac{١}{٨}$ $\frac{١}{٧}$ $\frac{١}{٦}$ ٠,٢ $\frac{١}{٥}$ $\frac{١}{٤}$ ٠,٣ $\frac{١}{٣}$ $\frac{١}{٢}$

لا نهائى ، $\frac{١}{٦}$.

---

٢ – ١٦ : إذا كان ں ≥ ن ، ما هى القيمة التى يجب أن تأخذها ن حتى تكون جميع حدود المتتابعة ($\frac{١}{ں}$) أقرب إلى الصفر من ٠,٣ ؟

ن ≥ ٤ لأن $\frac{١}{٤} = \frac{١٥}{٦٠} < \frac{١٨}{٦٠} = \frac{٣}{١٠}$

---

٢ – ١٧ : مهما كان العدد الذى نختاره صغيرا ، فإنه يوجد دائما حد من حدود المتتابعة ($\frac{١}{ں}$) يكون أقرب إلى الصفر من ذلك العدد . جميع الحدود بعد هذا الحد تكون أيضا ــــــ من العدد المختار .

أقرب إلى الصفر

---

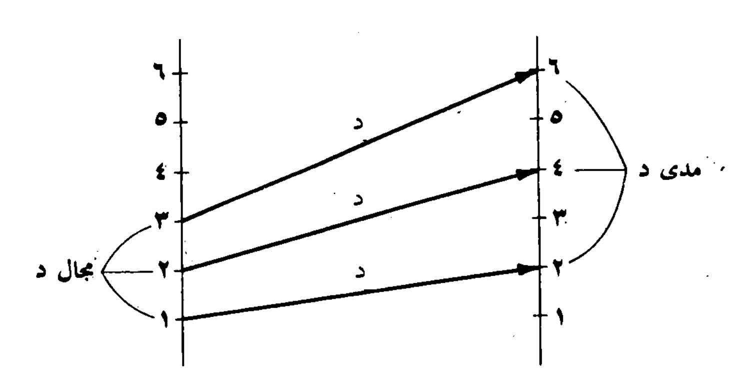
٢ – ١٨ : لا يمكن أبدا أن تساوى قيمة $\frac{١}{ں}$ صفرا ، مهما كانت ں كبيرة . ومع ذلك ، يمكننا جعل $\frac{١}{ں}$ قريبة من الصفر بأى درجة نشاء باختيار قيم (أكبر ، أصغر) للعدد ں .

أكبر

تحدثنا فى الباب الأول حدسيا عن آثار الحيوانات ، والتحويلات ، والرواسم ، والرسوم البيانية للأنهار ، والرسوم البيانية للمعادلات . سنناقش الآن تناظرات مجردة مشابهة تسمى « **دوال** » . إن التحويل أو الراسم الذي قمنا باشتقاقه من أثر الحيوان كان دالة.والرسم البياني للمعادلة ص = ٢ س سنسميه الآن دالة .

فالدالة تناظر يزاوج عناصر مجموعة س (مجال الدالة) مع عناصر مجموعة ص (مدى الدالة). ويمكننا وصف الدالة د: س ← ص بعمل قائمة بكل الأزواج المرتبة (أ ، ب) للتناظر. التناظر الذى يزاوج كل عنصر من عناصر المجال { ١ ، ٢ ، ٣ } مع ضعف هذا العنصر فى المدى { ٢ ، ٤ ، ٦ } يمكن تمثيله بمجموعة الأزواج المرتبة د = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) } . نفس هذه الدالة يمكن وصفها بالصورة د = { (س ، ص) | ص = ٢ س ، س ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ } } . ويقرأ هذا التعبير « **د تساوى مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث أن ص تساوى ٢ س ، س عنصر من عناصر المجال { ١ ، ٢ ، ٣ }** » .

إن الدالة عملية مزاوجة فى إتجاه واحد . فنحن ننظر للدالة د على أنها تحمل ١ إلى ٢ ، ٢ إلى ٤ ، ٣ إلى ٦ وليس العكس بالعكس كما تبين الأسهم فى شكل ٢ − ١ . وننظر إلى كل زوج مرتب كرسم للعنصر الأول فوق العنصر الثانى ، وعليه فإن الزوج المرتب (أ ، ب) يختلف عن الزوج المرتب (ب ، أ) حيث أن العنصر الأول فى (أ ، ب) هو أ بينما العنصر الأول فى (ب ، أ) هو ب .



شكل ٢ − ١

وعلاوة على هذا فإننا نقيد الدالة بعدم السماح برسم العنصر الأول فوق عنصرين ثانيين مختلفين ، ولكننا سنسمح برسم عناصر أولية متعددة فوق عنصر ثانى مشترك .

تعريف ٢ - ١ :

الدالة مجموعة ازواج مرتبة ليس لإثنين منها نفس العنصر الأول . « **مجال** » الدالة هو مجموعة العناصر الأولى فى الأزواج المرتبة ، و « **المدى** » هو مجموعة العناصر الثانية فى الأزواج المرتبة .

إذا كانت د دالة فإننا سنرمز إلى أن د ترسم ﺃ فوق ب بكتابة د (ﺃ) = ب ، والتى تعنى أن الزوج المرتب (ﺃ ، ب) عنصر من عناصر د : (ﺃ ، ب) ∋ د . وعندما نكتب د (ﺃ) = ب ، فإننا نقرر أن ب هى « **قيمة** » الدالة عند ﺃ . فمثلا حين نكتب د (س) = س^{٢} + ٣ س ، فإننا نعنى أن س^{٢} + ٣س هى قيمة الدالة د عند النقطة س فى مجال الدالة .

د = { (س ، ص) ص = س^{٢} + ٣س ، س ∋ ح }

وهى ما تكتب أحيانا د = { (س ، س^{٢} + ٣ س) }

الرسم البيانى للمعادلة ص = ٢ س هو مجموعة الأزواج المرتبة التى على الصورة (ﺃ ، ٢ﺃ) ، حيث ﺃ عدد حقيقى . كثيرا ماسنكتب هذه الدالة على الصورة { (س ، ص) | ص = ٢ س ، س ∋ ح } . ويقرأ هذا التعبير « مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث أن ص تساوى ٢ س ، س عنصر من عناصر مجموعة الأعداد الحقيقية »

٢ - **١٩** : مجموعة الأزواج المرتبة { (١ ، ٣) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٢ ، ٥) } تمثل دالة . كل عنصر من عناصر المجال يناظره عنصر واحد وواحد فقط من عناصر المدى . مجال الدالة هو المجموعة { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٢ } ومداها هو المجموعة { ٣ ، ٧ ، ٩ ، ٥ } .

هل تمثل مجموعة الأزواج المرتبة { (١ ، ٢) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (٢ ، ٤) } دالة ؟ ما هو مجالها ؟ ما هو مداها ؟

نعم ، هى دالة . { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } هو المجال ، { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } هو المدى .

---

٢ - **٢٠** : يصف تعريف ٢ - ١ الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة ليس لزوجين مرتبين منها نفس العنصر الأول . { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٣ ، ٦) } ليست دالة لأن لكل من (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) نفس العنصر الأول .

هل { (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٢) } دالة ؟

لا ؛ لكل من (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٣) نفس العنصر الأول .

---

٢ - **٢١** : كثيرا ما نصف الدالة بالنص على مجالها ومداها ثم وصف الأزواج المرتبة بمعادلة تعطى الصورة ص لأى نقطة س فى المجال .

مثـــال : الدالة فى ٢ – ١٩ دالة من المجال { ١، ٢، ٣، ٤ } فوق المدى { ٢ ، ٤ ، ٦، ٨ } . ويمكن التعبير عن هذه الحقيقة رمزيا بالصورة :

د : { ١، ٢، ٣، ٤ } ← { ٢، ٤، ٦، ٨ } .

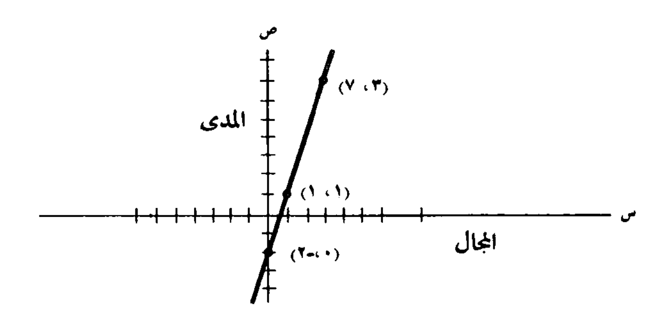
ووصف كامل للدالة هو :

د = { (س، ص) | ص = ٢ س، س ∈ { ١، ٢، ٣، ٤ } }

أعتبر الدالة من الأعداد الحقيقية فوق الاعداد الحقيقية ، د : ح ← ح ، الممثلة بالمعادلة ص = ٣ س – ٢ . ما هو المجال ، المدى ، الرسم البياني ، ووصف هذه الدالة ؟ استعمل ح لترمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية .

كل من المجال والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية . سنمثل المجال بيانيا على محور السينات والمدى على محور الصادات . الدالة نفسها هى المجموعة اللانهائية من النقط التي تكون الخط المستقيم ص = ٣ س – ٢ المرسوم بيانيا .

د = { (س، ص) | ص = ٣ س – ٢ ، س ∈ ح } .



٢ – ٢٢ : هل تمثل مجموعة الأزواج المرتبة التالية دالة : { (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)، (٥ ، ٦)، (١ ، ١) } ؟ ما هو مجالها ؟ ما هو مداها ؟

نعم ، هى دالة . المجال هو { ١، ٢، ٣، ٥ }، المدى هو { ١، ٣، ٤، ٦ }

تعريف ٢ – ٢ :

المتتابعة دالة مجالها مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية .

المتتابعة فى هذا الكتاب هى مجموعة من الأزواج المرتبة ، على سبيل المثال ،

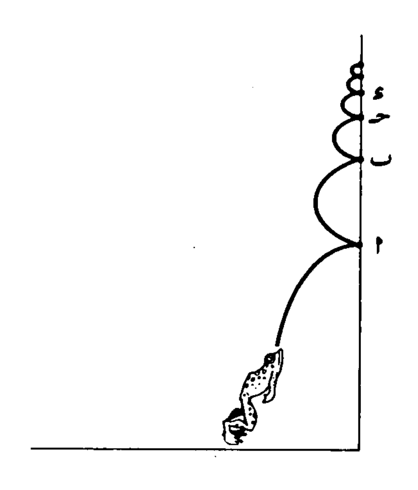
{ (١ ، $ح_١$)، (٢ ، $ح_٢$)، (٣ ، $ح_٣$)، (٤ ، $ح_٤$) ، ...، (ن ، $ح_ن$) } ،

فيها الإحداثى الأول من كل زوج مرتب عدد طبيعى والإحداثى الثانى عدد حقيقى . مجموعة الاحداثيات الأولى هى « **مجال** » المتتابعة ومجموعة الإحداثيات الثانية هى « **مدى** » المتتابعة . وحيث أن ترتيب الأعداد الطبيعية معروف جيدا فالمعتاد هو اختصار ذلك التعبير الرمزى إلى مجموعة مرتبة من عناصر المدى نرمز لها بالصورة : ($ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$، $ح_٤$، ...، $ح_ن$) .

مثـــال : أول خمسة أعداد طبيعية قابلة للقسمة على ٣ هى عناصر المدى لدالة معرفة على المجال {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ومداها المجموعة { ٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥ } . هذه الدالة هى المتتابعة « **النهائية** » {(١، ٣)، (٢، ٦)، (٣، ٩)، (٤، ١٢)، (٥، ١٥)}. انها تختصر إلى (٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥).

مثـــال : كل الأعداد الصحيحة الموجبة القابلة للقسمة على ٢ هى عناصر المدى للمتتابعة « **اللانهائية** » {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، ...، (ن، ٢ن)، ...} وتختصر إلى (٢، ٤، ٦، ...، ٢ن، ...) أو إلى (٢ن) . لاحظ أنه عند الإشارة إلى متتابعة نهائية فإننا نضع الحد العام فى آخرها : ($ح_{١}$، $ح_{٢}$، $ح_{٣}$، ...، $ح_{ن}$)؛ ولكن إذا أردنا الإشارة إلى متتابعة لا نهائية ، فإننا نضيف ثلاث نقط بعد الحد العام ($ح_{١}$، $ح_{٢}$، $ح_{٣}$، ...، $ح_{ن}$، ...) أو نكتب ($ح_{ن}$) . وإذا كانت صورة الحد العام واضحة فيمكننا أن نكتب ببساطة ($ح_{١}$، $ح_{٢}$، $ح_{٣}$، ...) للدلالة على متتابعة لا نهائية .

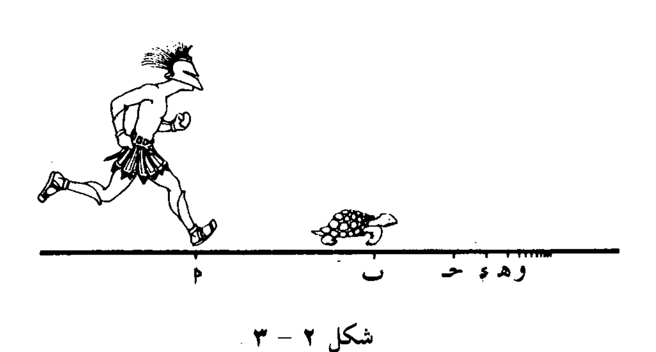
أفرض أن ضفدعة فى قاع بئر وقعت تحت تأثير سحر ما جعلها قادرة على القفز نصف المسافة إلى حافة البئر فى المحاولة الأولى ثم نصف المسافة المتبقية فى كل قفزة تالية (شكل ٢ – ٢)



شكل ٢ – ٢

هل ستستطيع الضفدعة أن تحرر نفسها من البئر وتخرج خارجه ؟ . أن المسافات المتتالية التى تقفزها الضفدعة تكون **متتابعة مسافات** ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ... ، $\frac{١}{٢^{ن}}$ ، ...) . إذا احتاجت الضفدعة ثانية واحدة بين القفزات و $\frac{١}{٢^{ن}}$ ثانية لقطع المسافة رقم ن ، فإن الزمن الذى تستغرقه لتنصيف المسافات إلى حافة البئر تكون **متتابعة زمنية** ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٩}{٨}$ ، ... ، ١ + $\frac{١}{٢^{ن}}$ ، ...) .

ورغم أن حدود متتابعة المسافات تزداد صغرا وتصبح صغيرة جداً عندما تكبر ن جداً ، فإن كل شخص تقريبا سيوافق على أن الضفدعة لن تحرر نفسها أبداً . ومع ذلك فقبل مناقشة هذه النتيجة ، دعنا ندرس المسألة التالية . أنها مشابهة تماماً ، ولكن الإجابة المعتادة تناقض على ما يبدو الإجابة التى حصلنا عليها فى التو .



شكل ٢ – ٣

لقد صاغ الفيلسوف زينو ، الذى عاش فى إليا على الشاطىء الجنوبى لإيطاليا حوالى عام ٥٠٠ ق.م، هذه المتناقضة الظاهرية التى يبدو فيها تفكيره كما لو كان يشير إلى أن أشيلس لا يستطيع الامساك بسلحفاة إذا سمح لها بالتمايز عليه فى بداية السباق . يبدأ أشيلس من نقطة م (شكل ٢ – ٣) وتبدأ السلحفاة من نقطة ب . سيحتاج أشيلس لزمن قدره ن١ ليقطع المسافة حتى ب . وفى نفس هذا القدر من الزمن تكون السلحفاة قد تحركت إلى حـ . وعليه فإنه سيكون على أشيلس أن يقطع المسافة إلى حـ قبل أن يتمكن من اللحاق بالسلحفاة . إنه سيحتاج لزمن قدره ن٢ ليقطع المسافة المتبقية حتى حـ ، ولكن خلال هذا الزمن تكون السلحفاة قد تحركت إلى ء . ولا يزال على أشيلس أن يقطع المسافة التى سارتها السلحفاة خلال هذه الفترة الزمنية الأخيرة . إنه سيحتاج لزمن قدره ن٣ لقطع هذه المسافة ، ولكن السلحفاة ستحرز مزيدا من التقدم خلال ن٣ . سيترك هذا مسافة رابعة على أشيلس ان يقطعها ، وبالطبع ، ستحرز السلحفاة مزيدا أكثر من التقدم خلال ن٤ . ويتساءل زينو عما إذا كان هذا سيستمر إلى الأبد ، إذ سيظل هناك دائما مسافة صغيرة على أشيلس أن يجريها . وبينما هو يجرى هذه المسافة ، ستحرز السلحفاة بعض التقدم تاركة لأشيلس مسافة أخرى بينه وبينها .

إذا كان البعد بين م ، ب ميل واحد وكان أشيلس يجرى بسرعة ٢ ميل / ساعة بينما تزحف السلحفاة بسرعة ١ ميل/ ساعة فقط ، فإن التجربة قد بينت أن أشيلس سيتجاوز السلحفاة بعد ساعة واحدة بالضبط . وهذه هى المتناقضة الظاهرية : كيف يستطيع أشيلس القيام بعدد لا نهائي من تنصيفات المسافة بينه وبين السلحفاة فى قدر محدود من الزمن ؟

أدرس الجدول التالي وانظر ما إذا كان باستطاعتك الإجابة على متناقضة زينو الظاهرية قبل الاسترسال فى القراءة .

الزمن الكلى	موضع أشيلس	موضع السلحفاة	المسافة بين أشيلس والسلحفاة
صفر	صفر = أ	١ = ب	١
$\frac{١}{٢}$	١ = ب	$\frac{٣}{٢}$ = جـ	$\frac{١}{٢}$
$\frac{٣}{٤}$	$\frac{٣}{٢}$ = جـ	$\frac{٧}{٤}$ = د	$\frac{١}{٤}$
$\frac{٧}{٨}$	$\frac{٧}{٤}$ = د	$\frac{١٥}{٨}$ = هـ	$\frac{١}{٨}$
$\frac{١٥}{١٦}$	$\frac{١٥}{٨}$ = هـ	$\frac{٣١}{١٦}$ = و	$\frac{١}{١٦}$
$\frac{٣١}{٣٢}$	$\frac{٣١}{١٦}$ = و	$\frac{٦٣}{٣٢}$ = ز	$\frac{١}{٣٢}$
$\frac{٦٣}{٦٤}$	$\frac{٦٣}{٣٢}$ = ز	$\frac{١٢٧}{٦٤}$ = ح	$\frac{١}{٦٤}$

إذن فبعد التنصيف السادس سيظل على أشيلس أن يقطع $\frac{١}{٦٤}$ من الميل قبل أن يتمكن من اللحاق بالسلحفاة . ولكن هل سيكون أشيلس قد تجاوز السلحفاة بعد مليون من هذه التنصيفات ؟ إن المسافات بين الإثنين ، بدءً من اللحظة التى كان فيها أشيلس عند ب تكون المتتابعة ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ... ، $\frac{١}{٢^ن}$ ، ...) . والأزمنة اللازمة لإجراء هذه التنصيفات تكون المتتابعة الزمنية ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ... ، $\frac{١}{٢^ن}$ ، ...) . وحدود كل من هاتين المتتابعتين يأخذ فى الصغر تدريجيا ، ولكن هل يساوى أى من هذه الحدود صفرا بالفعل ؟

بمقارنة مسألة أشيلس ومسألة الضفدعة نرى أنهما متشابهتان جدا . فى زمن قدره $ن_١$ ينصف أشيلس المسافة حتى السلحفاة . وينصف المسافة المتبقية فى كل فترة زمنية تالية تماما كما تفعل الضفدعة ، ومع ذلك فإننا نشعر بالبديهة أن أشيلس سيلحق فعلا بالسلحفاة بينما لن تخرج الضفدعة أبدا من البئر . هل هناك شيء مختلف فى المسألتين يسمح لأشيلس باللحاق بالسلحفاة بينما يعوق الضفدعة من مغادرة البئر ؟

إن المتتابعتين الزمنيتين فيهما مختلفتان . فأشيلس سيستغرق زمنا كليا قدره $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \dots + \frac{١}{٢^{ن}} + \dots$ لكى يلحق بالسلحفاة ، بينما الزمن الكلى الذى تستغرقه الضفدعة فى القفز إلى حافة البئر هو $\frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٤} + \frac{٩}{٨} + \dots + (١ + \frac{١}{٢^{ن}}) + \dots$ سنطلق على هذا الطراز من المجموع اسم « **مجموع متتابعة زمنية أو متسلسلة زمنية** » . وسيحتاج الأمر إلى عدة صفحات لشرح الفرق بين هذين المجموعين ، ولكننا سنبين فى كلمات موجزة أن مجموع متتابعة أشيلس الزمنية هو ١ ، مما يشير إلى أنه سيجرى عددا لانهائيا من التنصيفات فى ساعة واحدة ، بينما يتزايد مجموع المتتابعة الزمنية للضفدعة بلا حدود مما يشير إلى أنه لن يكون لدى الضفدعة الزمن اللازم لعمل عدد لا نهائى من التنصيفات .

وبعبارة أخرى ، إذا لم تأخذ الضفدعة الثانية الإضافية بعد كل قفزة فإنها كانت ستصل إلى حافة البئر ؛ وإذا استراح كل من أشيلس والسلحفاة لمدة ثانية واحدة بعد كل تنصيف فإن أشيلس لم يكن ليلحق بالسلحفاة .

ان حل المتناقضة الظاهرية يتوقف على بيان أن أشيلس يستطيع القيام بعدد لا نهائى من التنصيفات فى قدر محدود من الزمن ، ولذا فإننا سنقطع المناقشة لبيان أن مجموع المتتابغة الزمنية ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ...) هو ١ .

وسنبين فيما بعد أن $\frac{م}{١ - ر}$ هو مجموع المتوالية الهندسية $م + رم + ر^{٢}م + \dots + ر^{ن-١}م + \dots$ ، حيث $|ر| < ١$. وإذا فحصنا مجموع المتتابعة الزمنية ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ...) لرأينا أن النسبة ر بين الحدود هى $\frac{١}{٢}$ وأن الحد الأول م هو أيضا $\frac{١}{٢}$. وبهذا فإن المجموع $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \dots + \frac{١}{٢^{ن}} + \dots$ يكون

$$\frac{\frac{١}{٢}}{(١ - \frac{١}{٢})} = ١$$

وعلى ذلك فإن هذه الصيغة لمجموع المتوالية الهندسية تشير إلى أن أشيلس قد قطع مسافة الميل الواحد بينه وبين السلحفاة فى زمن قدره ساعة ، نظرا لأن مجموع كل من المتتابعة الزمنية ومتتابعة المسافات هو ١ .

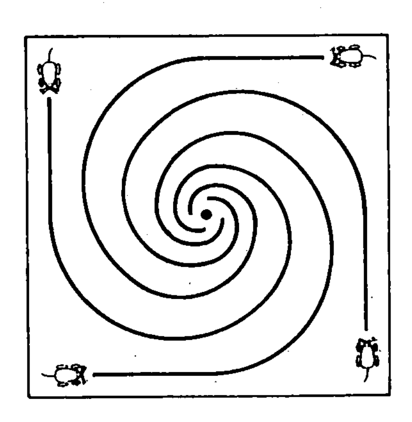
ولكن هل ستصل الضفدعة فى أى وقت إلى حافة البئر ؟ إنها تقفز ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ... ، $\frac{١}{٢^{ن}}$ ، ...) ، وهذه متوالية هندسية من المسافات مجموعها ١ ولكن ليس للمتسلسلة الزمنية للضفدعة ، $\frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٤} + \frac{٩}{٨} + \dots + (١ + \frac{١}{٢^{ن}}) + \dots$ ،أى قيمة كعدد حقيقى . هاهنا تقع المتناقضة الظاهرية فعلا . هل يستطيع أشيلس حقيقة أن يسير عبر عدد لا نهائى من النقط ؟ نعم ، وهذا يحدث كل

يوم . هل تستطيع الضفدعة أن تقفز عددا لانهائيا من المرات ؟ هذا ليس بالإمكان إذا كانت تستغرق ثانية واحدة على الأقل لكل قفزة . إذا كانت الضفدعة قادرة على القيام بعدد لا نهائى من القفزات فى زمن حياتها المحدود ، فإنها ستصل إلى حافة البئر . ولكن الضفدعة لا تستطيع القيام بعدد لا نهائى من القفزات لأن كل قفزة ستستغرق ثانية واحدة على الأقل وزمن حياة الضفدعة ليس طويلا بقدر يكفى للسماح بعدد لا نهائى من الثوانى . من جانب آخر فإن أشيلس يمكن أن يسير عبر عدد لا نهائى من النقط إذا لم نصر على توقفه لحظيا عند كل نقطة .

وفى الحقيقة فإن زينو يسأل « هل يستطيع أشيلس القيام بعدد لا نهائى من تنصيفات المسافة بينه وبين السلحفاة إذا كان كل تنصيف يستغرق ثانية ؟ » يجب أن نقر إنه لو كان كل تنصيف يستغرق ثانية على الأقل فإن أشيلس لن يستطيع أبدا أن يلحق بالسلحفاة . ويمكن للبعض أن يجادل بأن زينو كان يدرك بالتأكيد أن بعض التنصيفات ستستغرق أقل من ثانية واحدة . الواقع أن ماكان يقصده زينو هو الكرونون (أصغر جزء ممكن من الزمن) . فى هذا الجزء الوجيز من الزمن ، لم يكن أشيلس ليستطيع القيام بأكثر من تنصيف واحد ، ثم تنصيف واحد فى الكرونون التالى وهكذا هكذا بلا نهاية .

بما أننا قد أوضحنا أنه إذا سار أشيلس بسرعة ٢ ميل/ الساعة لمدة ساعة فإنه سيتم عددا لا نهائيا من التنصيفات فى الثانية الأخيرة فإنه يبدو أن لا وجود لشىء كالكرونون .

يوضح شكل ٢ - ٤ مثالا آخر يبين الفرق بين السير عبر عدد لا نهائى من النقط والوقوف للحظة من الزمن عند كل نقطة . فى هذه المسألة وضع فأر من فئران أربعة آلية فى ركن من أركان حجرة مربعة وقد تمت برمجة كل فأر ليتبع جاره الواقع على يمينه . وعند إدارة مفتاح البدء يتحرك كل فأر تجاه جاره ويستمر فى متابعته أينما ذهب .



شكل ٢ - ٤

ستدور الفئران الآلية حول النقطة في مركز الحجرة عددا لا نهائيا من المرات . بفرض أن هذه الفئران جميعها صغيرة بالقدر الكافى لأن تشغل نقطة واحدة ، فهل ستصل إلى مركز الحجرة فى أى وقت من الأوقات ؟ إذا كانت الفئران تصنع ١٠ دورات فى الثانية فإنها لن تصل أبدا إلى المركز لأنه لا يتاح عدد لا نهائى من الثوانى . وإذا كانت الفئران تتحرك بسرعة ١٠ قدم/ ثانية ، فإنها تستطيع اتمام عدد لا نهائى من الدورات فى الثانية الأخيرة ، ونظرا لأن طول الحلزون الذى ستقطعه محدود فإنها ستصل إلى المركز .

لقد افترضنا فى المناقشة السابقة أن مجموع المتوالية الهندسية يعطى بالمقدار $\frac{ا}{١ - ر}$ حيث $|ر| < ١$. سنبين الآن أن هذا الافتراض كان صحيحا. يشتق التعبير $\frac{ا}{١ - ر}$ عادة من الصيغة $ح_ن = \frac{ا - ا ر^ن}{١ - ر}$ التى تمثل مجموع ن حدا الأولى من المتوالية الهندسية وهو ما سنشتقه الآن . لتكن $ح_ن$ هى مجموع ن حدا الأولى من المتوالية الهندسية . إذن يمكننا كتابة

$$ح_ن = ا + ا ر + ا ر^٢ + \dots + ا ر^{ن-١}$$

إذا ضربنا الطرفين فى ر فإننا نحصل على

$$ر ح_ن = ا ر + ا ر^٢ + ا ر^٣ + \dots + ا ر^{ن-١} + ا ر^ن$$

بطرح $ر ح_ن$ من $ح_ن$ نجد ان كل الحدود ستختفى فيما عدا ا، $ا ر^ن$. إذن

$$ح_ن - ر ح_ن = ا - ا ر^ن$$

ومنها :

$$ح_ن (١ - ر) = ا - ا ر^ن$$

وبالتالى :

$$ح_ن = \frac{ا - ا ر^ن}{١ - ر} .$$

تعتمد الخطوة التالية فى الاشتقاق على المفهوم الهام الخاص بالنهاية . وهو مفهوم صعب سيستغرق باق الكتاب لشرحه بشكل كامل . إذا كانت ر عددا بين صفر وواحد فإننا ندعى أن $ر^ن$ تقترب من الصفر حين تزداد ن بلا حد . إذن ، فمجموع عدد لا نهائى من الحدود هو

$$\frac{ا - (ا)(صفر)}{١ - ر} = \frac{ا}{١ - ر}$$

إننا نعبر عن هذه الحقيقة بكتابة

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{ا - ا ر^ن}{١ - ر} = \frac{ا}{١ - ر} \text{ إذا كان صفر } < ر < ١ .$$

للاستزادة فى بحث هذه الحقيقة نحتاج لأن نعرّف بدقة ما نعنيه حين نقول « نهاية المتتابعة ($\frac{١}{٢^{ن}}$) عندما تزداد ن بلا حد تساوى صفر » وهو ما نعبر عنه بكتابة

$$\underset{ن \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \frac{١}{٢^{ن}} = \text{صفر}$$

ان الرمز $\underset{ن \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \frac{١}{٢^{ن}}$ = صفر يعنى بالتعريف أنه :

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد طبيعى ن
بحيث أنه

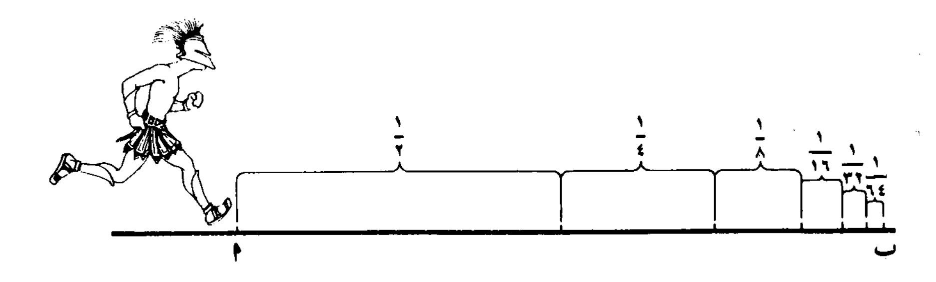
إذا كانت ن أكبر من أو تساوى ن فإن الفرق الموجب بين $\frac{١}{٢^{ن}}$ ، صفر يكون أقل من ε .

ويمكن كتابة هذا رمزيا بالصورة

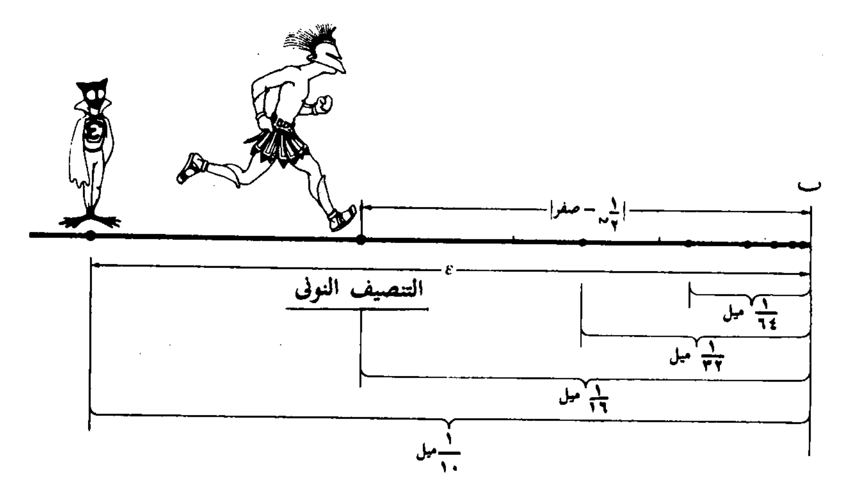
$$ن \geq ن \Leftarrow \left| \frac{١}{٢^{ن}} - \text{صفر} \right| < \varepsilon .$$

هذا التعريف من حيث الجوهر هو نفس التعريف الموجود فى الإطار ٢ - ١١ . هناك ذكرنا أن صفر هو نهاية المتتابعة ($\frac{١}{٢^{ن}}$) إذا كانت جميع عناصر المتتابعة فيما عدا عدد محدود منها تقع فى كل جوار للصفر . وفى التعريف أعلاه نصر على أن تكون جميع عناصر المتتابعة فيما عدا عدد محدود منها داخل جوار للصفر نصف قطره ε . العدد المحدود من العناصر التى تأتى قبل الحد رقم ن قد يكون خارج جوار الصفر الذى نصف قطره ε . والحد رقم ن والعدد اللانهائى من الحدود التى تأتى بعده (الحدود رقم ن حيث ن ≥ ن) تقع كلها داخل جوار الصفر الذى نصف قطره ε .

لشرح هذا التعريف سنقدم مثالا آخر . أفرض أن أشيلس قرر أن يسير من مدينة أ إلى مدينة ب التى تبعد بمقدار ميل عن أ (شكل ٢ - ٥) . إنه سيسير $\frac{١}{٢}$ ميل + $\frac{١}{٤}$ ميل + $\frac{١}{٨}$ ميل + ... حتى يقطع المسافة بين المدينتين . إن هذا التعريف يقود إلى منازلة بين أشيلس وشخص خفى يدعى إبسيلون . يقف إبسيلون قريبا بأى درجة يشاء من المدينة ب ، ولكن يمكن أن يكون أشيلس أقرب للمدينة بسيره عبر التنصيف رقم ن (شكل ٢ - ٦) .



شكل ٢ - ٥



شكل ٢ - ٦

إذا كان إبسيلون يقف على بعد $\frac{1}{10}$ ميل من المدينة ب ، فإن أشيلس سيكون أقرب إلى المدينة من إبسيلون بعد سيره عبر التنصيف الرابع . وكل تنصيف بعد الرابع سيجعل أشيلس أكثر قربا من المدينة .

ويمكن إختصار هذا إلى :

$$ن \geq ٤ \Leftarrow \left|\frac{1}{2^ن} - \text{صفر}\right| < \frac{1}{10} .$$

أى أنه إذا كانت ن أكبر من أو تساوى ٤ فإن المسافة بين $\frac{1}{2^ن}$ ، صفر تكون أقل من $\frac{1}{10}$.

أفرض أن إبسيلون يبعد عن المدينة بمقدار ٠.٠١ ميل . عندئذ يكون أشيلس أقرب إلى المدينة من إبسيلون بعد التنصيف السابع . أى أن ن $\geq$ ٧ سيجعل $\left|\frac{1}{2^ن} - \text{صفر}\right| < ٠.٠١$.

نهاية المتتابعة ($\frac{1}{2^ن}$) تساوى صفر حين تصبح ن لا نهائية إذا كان أشيلس يستطيع دائما أن يكون أقرب إلى المدينة من إبسيلون . ونظرا لأنه يوجد دائما عدد لا نهائى من التنصيفات الأقرب إلى الصفر من أى قرب يستطيع إبسيلون تحقيقه ، فإن جميع التنصيفات فيما عدا عدد محدود منها ستكون أكثر قربا من إبسيلون .

لقد صُمّم التمرين المبرمج التالى لإعطاء فهم أكثر دقة لهذه الأفكار .

٢ - ٢٣ : إذا كان $\lim_{ن \to \infty} \frac{1}{2^ن}$ = صفر ، فإنه

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد طبيعى ن

بحيث أن

$$ن \geq N \Leftarrow \left|\frac{1}{2^ن} - \text{صفر}\right| < ε$$

والتقارير التى على الصورة المذكورة أعلاه يمكن اعتبارها وصفا لمباراة . السيد إبسيلون هو المهاجم والقارىء هو المدافع . المهاجم يعطى قيما للرموز التى تلى « **لكل** » أما المدافع فعليه أن يحصل على قيم مناظرة لكل الرموز التى تلى « **يوجد** » . إذا أعطى المهاجم الرمز ε القيمة ١,٠ ، فسيكون علينا أن نحصل على عدد مناظر ن من ٤ بحيث يكون $\text{ﻫ} \geq ٤ \Leftarrow \left| \frac{1}{2^{\text{ﻫ}}} - \text{صفر} \right| < ١,٠$.

فإذا واجهنا بالتحدى بالقيمة ٠,٠١ للرمز ε ، فما هى أصغر قيمة للعدد ن تضمن أن

$$\text{ﻫ} \geq \text{ن} \Leftarrow \left| \frac{1}{2^{\text{ﻫ}}} - \text{صفر} \right| < ٠,٠١ \ ؟$$

ن = ٧ ؛ لأن $\left| \frac{1}{2^{7}} - \text{صفر} \right| = \frac{1}{128}$ وهى أقل من ٠,٠١.

---

٢ - ٢٤ : إذا ووجهنا بالتحدى لايجاد ن بحيث أن $\text{ﻫ} \geq \text{ن} \Leftarrow \left| \frac{1}{2^{\text{ﻫ}}} - \text{صفر} \right| < \frac{1}{50}$ فيمكننا اختيار ن = ٦ لأن $\left| \frac{1}{2^{6}} - \text{صفر} \right| = \frac{1}{64} < \frac{1}{50}$.

أوجد ن بحيث أن $\text{ﻫ} \geq \text{ن} \Leftarrow \left| \frac{1}{2^{\text{ﻫ}}} - \text{صفر} \right| < \frac{1}{200}$

ن ≥ ٨ . أى عدد طبيعى أكبر من ٨ سيفى بالغرض

---

٢ - ٢٥ : أى ن يمكنك اختيارها بحيث أن $\text{ﻫ} \geq \text{ن} \Leftarrow \left| \frac{1}{2^{\text{ﻫ}}} - \text{صفر} \right| < \frac{1}{1\,000\,000}$ ؟

ارشاد : $2^{20} = 1\,048\,576$ ؛ $2^{19} = 524288$

ن ≥ ٢٠ . ٢٠ هى أصغر ن ستحقق التقرير ، ولكن أى ن أكبر منها ستحققه هى الأخرى .

---

٢ - ٢٦ : تعريف $\lim_{\text{ﻫ} \to \infty} \frac{1}{2^{\text{ﻫ}}} = \text{صفر}$ هو

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد طبيعى ن

بحيث أن

$$\text{ﻫ} \geq \text{ن} \Leftarrow \left| \frac{1}{2^{\text{ﻫ}}} - \text{صفر} \right| < \varepsilon$$

عرف $\lim_{\text{ﻫ} \to \infty} \frac{1}{\text{ﻫ}} = \text{صفر}$.

تعريف $\lim_{ن \to \infty} \frac{1}{ﻫ} = \text{صفر}$ هو

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد طبيعى ن
بحيث أن
ﻫ ≥ ن ⇐ | $\frac{1}{ﻫ}$ − صفر | < ε

---

٢ – ٢٧ : المتتابعة ($\frac{1}{ﻫ}$) هى ($\frac{1}{1}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، ... ، $\frac{1}{ﻫ}$ ، ...) . إذا أعطينا ε = $\frac{1}{8}$ ، فإننا نريد أن نجد ن بحيث أن | $\frac{1}{ﻫ}$ − صفر | < $\frac{1}{8}$ لقيم ﻫ ≥ ن . إذا اخترنا ن = ٩ ، فإنه لكل عدد ﻫ أكبر من أو يساوى ٩ يكون | $\frac{1}{ﻫ}$ − صفر | < $\frac{1}{8}$. اننا نقول أن الحد التاسع وجميع الحدود التى تليه تكون أقرب إلى الصفر من $\frac{1}{8}$.

أوجد ن بحيث أن ﻫ ≥ ن ⇐ | $\frac{1}{ﻫ}$ − صفر | < ٠,٠١

ن ≥ ١٠١

---

٢ – ٢٨ : أى ن يمكنك اختيارها بحيث أن ﻫ ≥ ن ⇐ | $\frac{1}{ﻫ}$ − صفر | < ٠,٠٠١ ؟

ن > ١٠٠١

---

٢ – ٢٩ : ما هو تعريف $\lim_{ﻫ \to \infty} \frac{ﻫ^2 + 1}{ﻫ^2 - 1} = 1$ ؟ تأكد من أنك تشير إلى أن حدود المتتابعة تقترب من ١ ، أى أن | $\frac{(ﻫ^2 + 1)}{(ﻫ^2 - 1)}$ − ١ | تكون صغيرة لقيم ﻫ الكبيرة كبرا كافيا .

تعرف $\lim_{ﻫ \to \infty} \frac{ﻫ^2 + 1}{ﻫ^2 - 1} = 1$ بأنها تعنى أنه

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد طبيعى ن
بحيث أن
ر > ن ⇐ | $\frac{ﻫ^2 + 1}{ﻫ^2 - 1}$ − ١ | < ε

---

٢ – ٣٠ : تعرف $\underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ن^{٢} - ١}{ن^{٢} - ١} = ٣$ بأنها تعنى أنه ______

______

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد طبيعى ن
بحيث أن

$$ن \geq ن \Leftarrow \left| \frac{٣ن^{٢} - ١}{ن^{٢} - ١} - ٣ \right| < \varepsilon$$

الشكل التالى يوضح الرسم البيانى لعدد من حدود المتتابعة . لاحظ كيف أنها تتراكم بالقرب من نهاية المتتابعة . يمكننا أن نقول أن كل جوار للعدد ٣ يحتوى عددا لا نهائيا من نقط المتتابعة . أن كل جوار يحتوى جميع عناصر المتتابعة فيما عدا عدد محدود منها

______

٢ – ٣١ : تعرف $\underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{ن^{٢} - ١}{١ - ن^{٢}} = -١$ بأنه

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد طبيعى ن
بحيث أن ______

______

$$ن \geq ن \Leftarrow \left| \frac{ن^{٢} - ١}{١ - ن^{٢}} - (-١) \right| < \varepsilon$$

______

٢ – ٣٢ : أكتب قائمة بعناصر المتتابعة $\left(\frac{ن^{٢} - ١}{١ - ن^{٢}}\right)$ نظرا لأن هذه المتتابعة غير معرفة للقيمة ن = ١ ، فسيكون من الضرورى اعتبار أن مجال هذه المتتابعة مكون من الأعداد الطبيعية الأكبر من ١ .

______

–١ ، –١ ، –١ ، ...

______

٢ - ٣٣ : تعرف $\underset{ن \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{١}{٣^{ن}}$ = صفر بأنها تعنى أن ـــــ

لكل عدد حقيقى ε > صفر
يوجد ن > صفر
بحيث أنه

$$ن \geq ن \Leftarrow \left| \frac{١}{٣^{ن}} - \text{صفر} \right| < \varepsilon$$

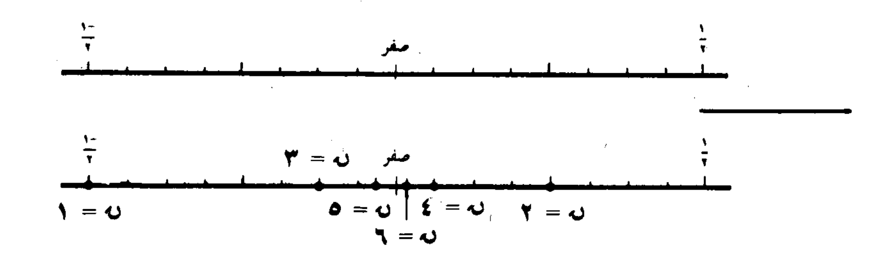
---

٢ - ٣٤ : أكتب قائمة بعناصر المتتابعة $\left(-\frac{١}{٢}\right)^{ن}$

$$-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٨} ، \frac{١}{١٦} ، \dots ، \left(-\frac{١}{٢}\right)^{ن} ، \dots$$

---

٢ - ٣٥ : مثل بيانيا الحدود الستة الأولى من المتتابعة $\left(-\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ على خط الأعداد التالى :



---

٢ - ٣٦ : نهاية المتتابعة اللانهائية $\left(٢ - \left(-\frac{١}{٢}\right)^{ن}\right)$ تساوى ٢ . وحين تمثل هذه المتتابعة بيانيا فإن عناصر مدى المتتابعة تكون أكبر وأصغر من ٢ على التبادل ، ولكن كل حد يكون أقرب إلى ٢ من الحد الذى يسبقه . فى أى جوار للعدد ٢ يوجد عدد لا نهائى من حدود المتتابعة ، وكل جوار للعدد ٢ يحوى جميع عناصر المتتابعة فيما عدا عدد محدود منها . أكتب قائمة بعناصر المتتابعة $\left(٢ - \left(-\frac{١}{٢}\right)^{ن}\right)$.

$$\frac{٥}{٢} ، \frac{٧}{٤} ، \frac{١٧}{٨} ، \frac{٣١}{١٦} ، \dots ، \frac{٢^{(ن+١)} - (-١)^{ن}}{٢^{ن}} ، \dots$$

لاحظ أن : $\frac{٢^{(ن+١)} - (-١)^{ن}}{٢^{ن}} = ٢ - \left(-\frac{١}{٢}\right)^{ن}$

ن = ١ ، ن = ٣ ، ن = ٥ ، ن = ٦ ، ن = ٤ ، ن = ٢

---

٢ – ٣٧ : تعرف $\lim_{ن \to \infty} (٢ - (-\frac{١}{٢})^{ن}) = ٢$ بأنه

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد طبيعى ن
بحيث أن

$ن \geq ن \Leftarrow \left| ٢ - (-\frac{١}{٢})^{ن} - ٢ \right| < \varepsilon$

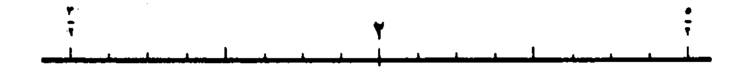
---

٢ – ٣٨ : أكتب قائمة بعناصر المتتابعة $(٢ + (-\frac{١}{٢})^{ن})$

$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{١٥}{٨}$ ، $\frac{٣٣}{١٦}$ ، ... ، $\frac{٢^{(ن+١)} + (-١)^{ن}}{٢^{ن}}$ ، ...

---

٢ – ٣٩ : مثل بيانيا الحدود الستة الأولى من حدود المتتابعة $(٢ + (-\frac{١}{٢})^{ن})$ على خط الأعداد التالى :



الرسم البيانى مماثل للرسم الموجود فى ٢ – ٣٥ فيما عدا أن نقطة المركز تكون عند ٢ .

---

٢ – ٤٠ : ما هى $\lim_{ن \to \infty} (٢ + (-\frac{١}{٢})^{ن})$ ؟

$\lim_{ن \to \infty} (٢ + (-\frac{١}{٢})^{ن}) = ٢$

---

٢ – ٤١ : أكتب قائمة بعناصر المتتابعة $(٣ - (\frac{١}{٢})^{ن})$.

$\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٤}$ ، $\frac{٢٣}{٨}$ ، $\frac{٤٧}{١٦}$ ، $\frac{٩٥}{٣٢}$ ، ... ، $\frac{٣ (٢)^{ن} - ١}{٢^{ن}}$ ، ...

يمكن كتابة الحد العام بصور مختلفة :

$$٣ - (\frac{١}{٢})^{ن} = ٣ - \frac{١}{٢^{ن}} = \frac{٣ (٢)^{ن}}{٢^{ن}} - \frac{١}{٢^{ن}} = \frac{٣ (٢)^{ن} - ١}{٢^{ن}}$$

---

٢ - ٤٢ : ما هى نهاية ($٣ - (\frac{١}{٢})^{ں}$) عندما تتزايد ں بلا حد ؟

٣

---

٢ - ٤٣ : ما هو تعريف $\lim\limits_{ں \to \infty} (٣ - (\frac{١}{٢})^{ں}) = ٣$ ؟

تعرف $\lim\limits_{ں \to \infty} (٣ - (\frac{١}{٢})^{ں}) = ٣$ بأنها تعنى أن

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد طبيعى ن

بحيث أن

$$ں \geq ن \Rightarrow \left| (٣ - (\frac{١}{٢})^{ں}) - ٣ \right| < \varepsilon$$

---

٢ - ٤٤ : ما هى أصغر قيمة يمكنك أعطاءها للعدد ن لضمان أن جميع حدود ($٣ - (\frac{١}{٢})^{ں}$) بعد الحد رقم ن ستكون أقرب إلى ٣ من ٣,٠٠١ ؟ ارشاد : $٢^{١٠} = ١٠٢٤$ ، $٢^{٩} = ٥١٢$.

ن = ١٠ . لأن $ں \geq ١٠ \Rightarrow \left| (٣ - (\frac{١}{٢})^{ں}) - ٣ \right| < ٠,٠٠١$

---

٢ - ٤٥ : عرف التقرير « ل تكون نهاية المتتابعة اللانهائية ($ح_{ں}$) حين تزداد ں بلا حد »

تعريف ٢ - ٣ :

يعرف التعبير $\lim\limits_{ں \to \infty} ح_{ں} = ل$ بأنه يعنى أن

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد طبيعى ن

بحيث أن

$$ں > ن \Rightarrow \left| ح_{ں} - ل \right| < \varepsilon$$



الباب الثالث

الاتصال

بيّنا فى الباب الأول أنه عند دراسة الاتصال فإننا نهتم بما إذا كانت الدالة ترسم النقط القريبة من بعضها البعض فى المجال إلى نقط قريبة من بعضها البعض فى المدى . إننا نقول أن الدالة د متصلة عند نقطة حـ فى مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل جوار للنقطة د (حـ) نصف قطره ε

يوجد جوار للنقطة حـ نصف قطره δ

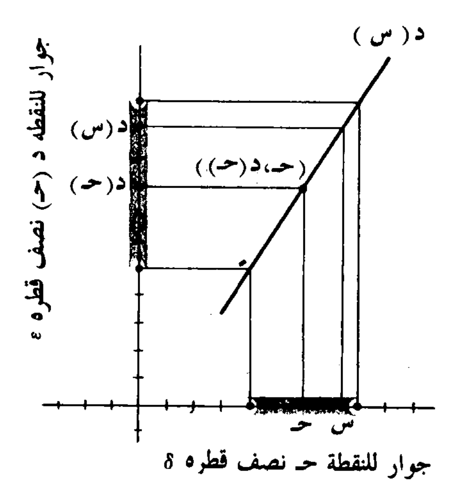
بحيث أن

لكل نقطة س فى مجال د

اذا كانت س فى جوار للنقطة حـ نصف قطره δ ، فإن د (س) تكون فى جوار للنقطة د (س) نصف قطره ε .

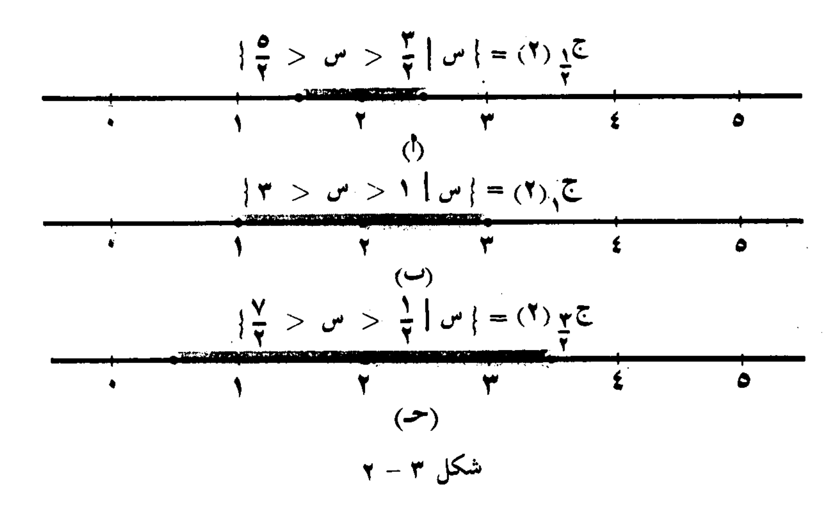
يوضح شكل ٣ - ١ هذا التعريف ، الذى يوحى لنفس لعبة المهاجم والمدافع التى لعبناها فى الباب الثانى . يطلب المهاجم قربا قدره ε من القيمة د (حـ) ، ويجيب المدافع بعدد δ بحيث ترسم جميع نقط مجال د الواقعة فى جوار للنقطة حـ نصف قطره δ إلى الجوار المعطى للقيمة د (حـ) الذى نصف قطره ε .

إذا امكن ايجاد δ فإن المدافع يكسب ، وتكون الدالة متصلة عند حـ .

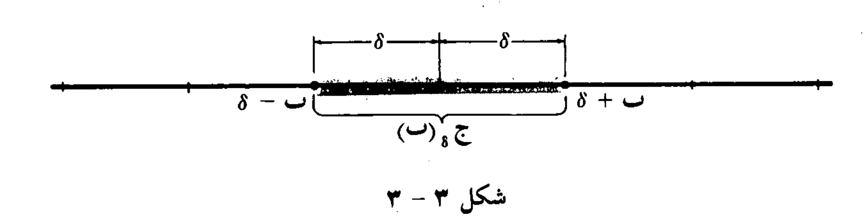


شكل ٣ - ١

سنستخدم الاصطلاح « جوار » لمجموعة ، تسمى أيضا فترة مفتوحة أو كرة مفتوحة أو قرصا مفتوحا ، ونحن نفضل الاصطلاح « جوار » ، لأنه يحمل ضمنا المعنى الحدسى لمفهوم القرب . فحين يعيش شخص بالقرب منا ، نقول أنه يعيش فى جوارنا . إذا كانت س نقطة بعدها عن ب أقل من δ فسنقول أن س تنتمى لجوار للنقطة ب نصف قطره δ . فإذا كانت المسافة من س إلى ب أقل من ٢ مثلا ، فسنقول أن س تنتمى لجوار للنقطة ب نصف قطره ٢ ونرمز لهذا بالرمز س $\in$ ج$_{٢}$ (ب) .



شكل ٣ – ٢



شكل ٣ – ٣

شكل ٣ – ٢ يبين فئة من الجوارات للنقطة ٢ ، وهى عبارة عن فترات مفتوحة على خط الأعداد الحقيقية . الجوار الأول للنقطة ٢ (شكل ٣ – ٢ أ) نصف قطره $\frac{١}{٢}$ ويتكون من جميع الأعداد الحقيقية الواقعة بين $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$. تكتب هذه العبارة رمزيا على الصورة :

$$ج_{\frac{١}{٢}} (٢) = \{ س \mid \frac{٣}{٢} < س < \frac{٥}{٢} \}$$

وتقرأ « جوار النقطة ٢ الذى نصف قطره نصف هو مجموعة جميع النقط س بحيث تكون س أكبر من $\frac{٣}{٢}$ وأقل من $\frac{٥}{٢}$ » . إذا كانت س تنتمى إلى ج$_{\frac{١}{٢}}$ (٢) ، فإن $|س - ٢| < \frac{١}{٢}$.

فى شكل ٣ – ٢ ب ، الجوار $ج_{١}$ (٢) هو المجموعة { س | ١ < س < ٣ } ، أى مجموعة كل س بحيث تقع س بين ١ ، ٣ . واذا كانت س فى $ج_{١}$ (٢) ، فإن | س – ٢ | < ١ .

فى شكل ٣ – ٢ حـ ، الجوار $ج_{\frac{٣}{٢}}$ (٢) هو المجموعة { س | $\frac{١}{٢}$ < س < $\frac{٧}{٢}$ } ،

س ∈ $ج_{\frac{٣}{٢}}$ (٢) ⇐ | س – ٢ | < $\frac{٣}{٢}$.

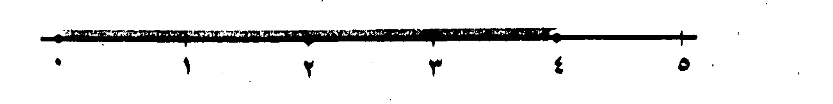
على خط الأعداد الحقيقية يكون $ج_{\delta}$ (ب) جوار النقطة ب الذى نصف قطره δ (شكل ٣ – ٣) . والجزء المظلل من خط الأعداد الحقيقية بين ب – δ ، ب + δ هو جوار النقطة ب الذى نصف قطره δ . النقطتان ب – δ ، ب + δ ليستا عناصر فى الجوار $ج_{\delta}$ (ب) .

$$ج_{\delta}\ (ب) = \{ س \mid ب - \delta < س < ب + \delta \}$$

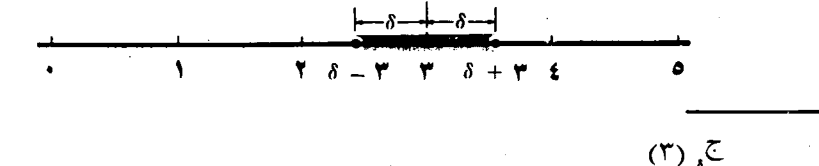
٣ – ١ : مثل بيانيا $ج_{\frac{٣}{٤}}$ (٣)



٣ – ٢ : مثل بيانيا $ج_{٢}$ (٢)



٣ – ٣ : عبر رمزيا عن الجوار الممثل بيانيا فى الشكل التالى :



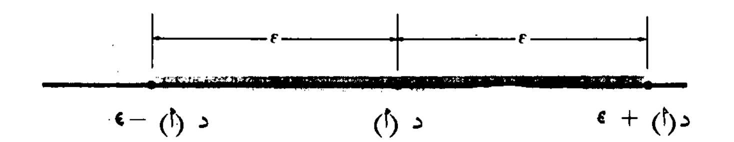
$ج_{\delta}$ (٣)

٣ – ٤ : عبر رمزيا عن الجوار الممثل بيانيا فى الشكل التالى :

٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

$ج_{٢}$ (٣)

٣ – ٥ : عبر رمزيا عن الجوار الممثل بيانيا فى الشكل التالى :



ج$_\varepsilon$ (د (أ))

---

٣ – ٦ : تكون الدالة د متصلة عند نقطة حـ فى مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل جوار للقيمة د (حـ) نصف قطره ε
يوجد جوار للنقطة حـ نصف قطره δ
بحيث أن
لكل نقطة س فى مجال د
إذا كانت س فى جوار للنقطة حـ نصف قطره δ فإن د (س) تكون فى جوار للقيمة د (حـ) نصف قطره ε .

عبر رمزيا عما تحته خط

س ∈ ج$_\delta$ (حـ) ⇐ د (س) ∈ ج$_\varepsilon$ (د (س))

---

٣ – ٧ : أعد كتابة التعريف الخاص بالعبارة « تكون د متصلة عند نقطة ب فى مجال د » باستخدام رمز القيمة المطلقة للدلالة على البعد .

لاحظ أن | س – ب | < δ تكافىء س ∈ ج$_\delta$ (ب) . وبالمثل ، | د (س) – د (ب) | < ε تكافىء د (س) ∈ ج$_\varepsilon$ (د (ب)) .

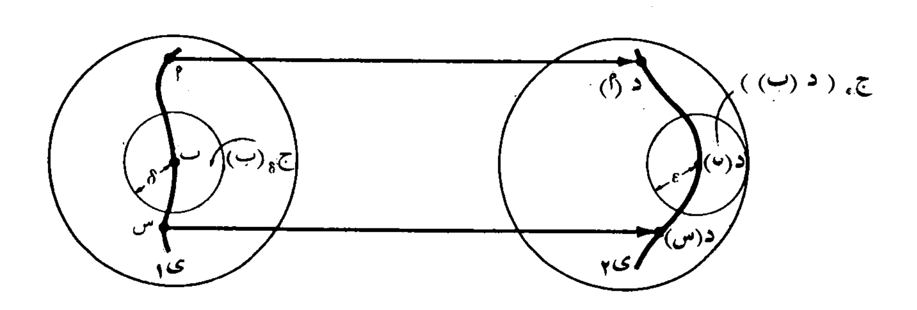
تعريف ٣ – ١

تكون الدالة د متصلة عند نقطة ب فى مجالها إذا وفقط إذا كان
لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال د

| س – ب | < δ ← | د (س) – د (ب) | < ε

وسيكون هذا هو تعريفنا للاتصال عند نقطة فى مجال الدالة .

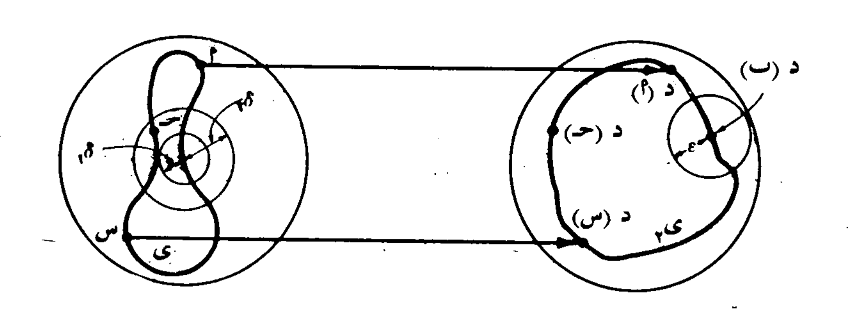
تصور غشاء طبلة مصنوعا من مادة مرنة تتحمل تشوهات قاسية دون أن يتمزق . هذا الغشاء يمثل قرصا ثنائى البعد يمكننا أن نستحدث عليه تحويلات متصلة عن طريق الإجهاد أو الشد . فإذا رسمنا منحنى على غشاء الطبلة ثم شوهنا الرسم بشد الغشاء فإن التحويل الناتج سيكون متصلا .



شكل ٣ - ٤

يوضح شكل ٣ - ٤ تحويلا ناشئا عن شد غشاء الطبلة إلى اليمين . المنحنى ى$_1$ هو مجال التحويل ، والمنحنى ى$_2$ هو مدى التحويل . فى التحويلات الناشئة بهذه الطريقة على قرصنا ، يوجد لكل جوار للقيمة د (ب) فى المدى جوار للنقطة ب فى المجال بحيث أن كل نقطة فى المجال قريبة من ب ترسم إلى نقطة فى الجوار المعطى للقيمة د (ب) . فى التحويل المعطى أعلاه ، النقطة د (ب) هى صورة النقطة ب وكل نقطة فى الجوار ج$_\delta$ (ب) ترسم إلى نقطة ما قريبة فى حدود ε من د (ب) .

والنقطة س تنتمى للجوار ج$_\delta$ (ب) إذا كانت المسافة بين س ، ب أقل من δ .



شكل ٣ ـ ٥

فى التحويل التالى المصور على غشاء الطبلة (شكل ٣ − ٥) ، ليس صحيحا أن كل نقطة من نقط المجال التى على بعد فى حدود δ_1 من ب ترسم إلى نقطة تنتمى للجوار ج$_\epsilon$ (د (ب)) . أى أنه توجد نقطة حـ من نقط المجال قريبة من ب فى حدود δ_1 ولا ترسم إلى نقطة قريبة فى حدود ϵ من د (ب) فى المدى .

ومع ذلك ، توجد δ بحيث أن كل نقطة من نقط المجال قريبة فى حدود δ من ب ترسم إلى نقطة قريبة فى حدود ϵ من د (ب) . ويعبر عن هذا رمزيا على الصورة :

$$\text{س} \in \text{ج}_\delta(\text{ب}) \Leftarrow \text{د}(\text{س}) \in \text{ج}_\epsilon(\text{د}(\text{ب}))\text{ ،}$$

وهو ما يعنى ببساطة أنه إذا كان البعد بين س ، ب أقل من δ_1 ، فإن البعد بين د (س) ، د (ب) يكون أقل من ϵ . وحيث أنه من الممكن إيجاد جوار ما للنقطة ب نصف قطره δ لكل جوار للنقطة د(ب) نصف قطره ϵ ، فإننا نستنتج أن الدالة متصلة عند ب .

٣ − ٨ : لتكن د : ح ← ح هى الدالة { (س ، ص) | ص = ٣ س + ١ ، س ∈ ح } .

فرض أن التحدى الذى يواجهنا هو ايجاد δ تحقق التقرير

$$|\text{س} - ٢| < \delta \Leftarrow |(٣\text{س} + ١) - ٧| < \frac{١}{٢}$$

إذا كانت د متصلة عند النقطة ٢ فإنه يوجد δ كهذه . ولايجاد قيمة مضبوطة للعدد δ سنبدأ بالتالى ، $|(٣\text{س} + ١) - ٧| < \frac{١}{٢}$ ، ونستعيض عن الطرف الأيمن منه بتعبيرات مختلفة حتى نحصل على شيء مماثل للمتقدم ، $|\text{س} - ٢| < \delta$. سنسمى هذه العملية استكشافا ، وذلك لأسباب سنوضحها فيما بعد .

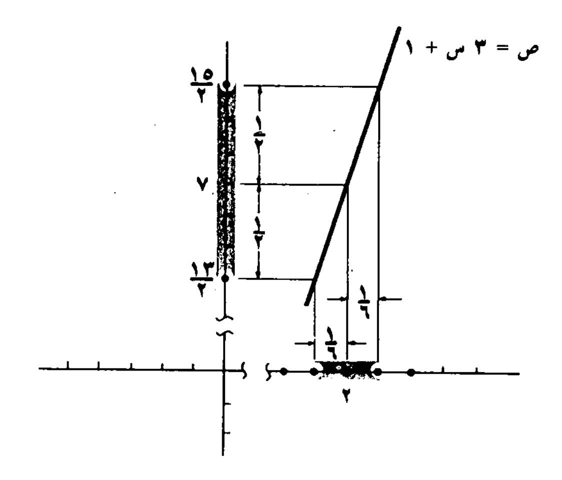
أ : $|(٣\text{س} + ١) - ٧| < \frac{١}{٢}$

ب : $|٣\text{س} - ٦| < \frac{١}{٢}$

حـ : $٣|\text{س} - ٢| < \frac{١}{٢}$

ء : $|\text{س} - ٢| < \frac{١}{٦}$

والآن إذا اخترنا $\delta = \frac{١}{٦}$ ، فإن التقرير (ء) يكون مطابقا للمتقدم $|\text{س} - ٢| < \delta$. وبالتالى نستطيع الآن إثبات أنه إذا كان س ∈ ج$_{\frac{١}{٦}}$ (٢) فإن د (س) ∈ ج$_{\frac{١}{٢}}$ (٧)



البرهـــان :

١ : $|$ س − ٢ $| < \frac{١}{٦}$

٢ : ٣ $|$ س − ٢ $| < \frac{١}{٢}$

٣ : $|$ ٣ س − ٦ $| < \frac{١}{٢}$

٤ : $|$ (٣ س + ١) − ٧ $| < \frac{١}{٢}$

لقد بينا أنه إذا كانت س على بعد فى حدود $\frac{١}{٦}$ من ٢ ، فإن ٣ س + ١ تكون على بعد فى حدود $\frac{١}{٢}$ من ٧ . أوجد قيمة للعدد δ تحقق التقرير

$|$ س − ٢ $| < \delta \Leftarrow |$ (٣ س + ١) − ٧ $| < \frac{١}{٤}$.

$\delta \geq \frac{١}{١٢}$. وقد تم إيجاد هذا الحد العلوى للقيم التى يمكن أن تأخذها δ بالبدء بالتالى $|$ (٣ س + ١) − ٧ $| < \frac{١}{٤}$ ، والتعديل فيه حتى الحصول على تقرير مشابه للمتقدم $|$ س − ٢ $| < \delta$.

اســتكشاف :

أ : $|$ (٣ س + ١) − ٧ $| < \frac{١}{٤}$

ب : $|$ ٣ س − ٦ $| < \frac{١}{٤}$

حـ : ٣ $|$ س − ٢ $| < \frac{١}{٤}$

ى : $|$ س − ٢ $| < \frac{١}{١٢}$

وعلى ذلك ، فلو فرضنا أن δ هى أى عدد حقيقى موجب أقل من أو يساوى $\frac{١}{١٢}$ ، فإنه يمكننا اثبات أن

$$|س - ٢| < \delta \Rightarrow |(٣س + ١) - ٧| < \frac{١}{٤} .$$

---

٣ - ٩ : ماهى قيم δ التى تحقق التقرير

$$|س - ٢| < \delta \Rightarrow |(٣س + ١) - ٧| < ٠,٠١ \text{ ؟}$$

$\delta \leq ٠,٠٠٣٣$

استكشاف :

أ : $|(٣س + ١) - ٧| < ٠,٠١$

ب : $|٣س - ٦| < ٠,٠١$

حـ : $٣|س - ٢| < ٠,٠١$

ء : $|س - ٢| < ٠,٠٠٣٣$

لاحظ أن الخطوة (حـ) لا تؤدى إلى الخطوة (ء) لأن $٠,٠٠٣٣ < \frac{٠,٠١}{٣}$. ومع ذلك ، فإن (ء) تؤدى إلى (حـ) بالفعل ، وهذا هو المهم فى إثبات أن

$$|س - ٢| < ٠,٠٠٣٣ \Rightarrow |(٣س + ١) - ٧| < ٠,٠١$$

البرهــان :

١ : $|س - ٢| < ٠,٠٠٣٣$

٢ : $٣|س - ٢| < ٠,٠١$

٣ : $|٣س - ٦| < ٠,٠١$

٤ : $|(٣س + ١) - ٧| < ٠,٠١$

وبهذا نرى أنه كان يمكننا اختيار أى عدد أقل من $\frac{٠,٠١}{٣}$. إن $\delta = ٠,٠٠٠٣$ ، أو $\delta = ٠,٠٠٠١$ ،أو $\delta = ٠,٠٠٠٩$ هى بعض من العدد اللانهائى من القيم التى يمكن أن تأخذها δ . ومن المهم إدراك أننا نبحث فى الاستكشاف عن خطوة تالية سوف تؤدى إلى الخطوة السابق كتابتها فعلا . وهناك عادة عدد لانهائى من الامكانات للخطوة التالية ، ولكن واحدة أو إثنتين منها لحسن الحظ أكثر وضوحا من بقيتها .

إذا كانت (حـ) هى ٣ | س — ٢ | < ٠,٠١ فإن

ى : | س — ٢ | < ٠,٠٠٠١

تكون مقبولة ؛ وكذلك أيضا

ى : | س — ٢ | < $١٠^{-٦}$

ولكن التقرير (ى) الذى يبدو طبيعيا أكثر من غيره هو

ى : | س — ٢ | < ٠,٠٠٣٣

من المهم أن ى ⇐ حـ ، ولكن ليس من الضرورى أن حـ ⇐ ى .

---

٣ - ١٠ : أثبت أن الدالة { (س ، ص) | ص = ٣ س + ١ ، س ∈ ح } متصلة عند النقطة ٣ من مجالها .

إن هذا هو أول برهان يطلب منك كتابته ، ولذا فعليك أخذ هذا الإطار بمنتهى الجدية . يجب عليك مراجعة التعريف الموجود فى الإطار ٣ - ٧ وكتابة استكشاف قبل محاولة البرهان . ومن فضلك اعتبر أن هذا الإطار تحديا أكثر منه عائقا مستحيلا .

يجب أن نثبت أن

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال { (س ، ٣ س + ١) }

| س — ٣ | < δ ⇐ | (٣ س + ١) — ١٠ | < ε

اســتكشاف :

أ : | (٣ س + ١) — ١٠ | < ε

ب : | ٣س — ٩ | < ε

حـ : | س — ٣ | < $\frac{\varepsilon}{3}$

هذا التقرير الأخير هو ببساطة المتقدم

| س — ٣ | < δ إذا كانت δ = $\frac{\varepsilon}{3}$

إثبات أن الدالة { (س ، ص) | ص = ٣ س + ١ ، س ∈ ح } متصلة عند النقطة ٣ فى مجالها :

١ : لأى ε معطاة ، إختر δ = $\frac{\varepsilon}{3}$.

٢ : إذا كان | س — ٣ | < δ فإن

٣ : | س — ٣ | < $\frac{\varepsilon}{3}$

٤ : | ٣ س — ٩ | > ε

٥ : | (٣ س + ١) — ١٠ | > ε

وبذلك :

٦ : | س — ٣ | > δ ⇐ | (٣ س + ١) — ١٠ | > ε

---

٣ - ١١ : أثبت أن د = { (س ، ص) | ص = ٣ س + ١ ، س ∈ ح } تكون متصلة عند ١ .

يجب أن نثبت أن

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال { (س ، ٣ س + ١) }

| س — ١ | > δ ⇐ | (٣ س + ١) — ٤ | > ε

استكشاف :

أ : | (٣ س + ١) — ٤ | > ε

ب : | ٣ س — ٣ | > ε

حـ : | س — ١ | > $\frac{ε}{٣}$

البرهان :

١ : لأى ε معطاة اختر δ = $\frac{ε}{٣}$

٢ : إذا كان | س — ١ | > δ فإن

٣ : | س — ١ | > $\frac{ε}{٣}$

٤ : ٣ | س — ١ | > ε

٥ : | ٣ س — ٣ | > ε

٦ : | (٣ س + ١) — ٤ | > ε

وبذلك

٧ : | س — ١ | > δ ⇐ | (٣ س + ١) — ٤ | > ε

طبقا لتعريف ٣ — ١ يكون هذا برهانا على أن هذه الدالة متصلة عند النقطة ١ فى مجالها .

٣ ـــ ١٢ : أثبت أن د = { (س ، ص) | ص = س^{٢} ـــ ٣ س ـــ ٤ ، س ∈ ح }

تكون متصلة عند ٣ . من المهم أن تتذكر دائما أن الاستكشاف ليس برهانا وانما بحث عن نقطة بداية للبرهان . إذا كانت لدينا خطوة فى الاستكشاف :

حـ : | س | | س ـــ ٣ | < ε

فإن الخطوة التالية يمكن أن تكون أى تقرير يمكنه أن يؤدى الى أن | س | | س ـــ ٣ | < ε وإذا قيدنا قيم س لتلك التى تنتمى إلى جوار نصف قطره ١ للنقطة ٣ ، س ∈ ج$_{١}$ (٣) ، فإن ٢ < س < ٤ ، | س | < ٤ . وبالتالى ينتج أن :

ء : ٤ | س ـــ ٣ | < ε

يؤدى إلى (حـ) . وكذلك ستفعل

ء : ٥ | س ـــ ٣ | < ε

أو

ء : ١٠٠ | س ـــ ٣ | < ε

يجب أن نبين أنه

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

| س ـــ ٣ | < δ ⇐ | (س^{٢} ـــ ٣ س ـــ ٤) ـــ (ـ٤) | < ε

اســتكشاف :

أ : | (س^{٢} ـــ ٣ س ـــ ٤) ـــ (ـ٤) | < ε

ب : | س^{٢} ـــ ٣ س | < ε

حـ : | س | | س ـــ ٣ | < ε

ء : ٤ | س ـــ ٣ | < ε إذا كان س ∈ ج$_{١}$ (٣)

هـ : | س ـــ ٣ | < $\frac{ε}{٤}$

فى الخطوة (ء) نستطيع التعويض بالقيمة ٤ بدلا من | س | لأنه إذا كان س ∈ ج$_{١}$ (٣) ، فإن | س | لن تكون أبدا أكبر من ٤ . ويجب أن نعوض بأكبر قيمة ممكنه للعدد | س | لأننا نريد من (ء) أن تؤدى إلى (حـ) فى البرهان .

البرهـــان :

١ : لأى ε معطاة ، اختر δ مساوية للأصغر من $\frac{ε}{٤}$ ، ١ ؛ أى اختر δ = أصغر { $\frac{ε}{٤}$ ، ١ } ، أى أن δ تساوى أصغر العددين $\frac{ε}{٤}$ ، ١ .

٢ : إذا كان | س ـ ٣ | < δ فإن

٣ : | س ــ ٣ | < $\frac{ε}{٤}$ ، | س ــ ٣ | < ١

٤ : ٤ | س ــ ٣ | < ε ، ٣ ــ ١ < س < ٣ + ١

٥ : ٤ | س ــ ٣ | < ε ، ٢ < س < ٤

٦ : ٤ | س ــ ٣ | < ε ، | س | < ٤

٧ : | س | | س ــ ٣ | < ε

نظرا لأن ٦ تنص على أن | س | < ٤ ، فإن ٤ | س ــ ٣ | < ε يؤدى إلى | س | | س ــ ٣ | < ε

٨ : | س^{٢} ــ ٣ س | < ε

٩ : | (س^{٢} ــ ٣ س ــ ٤) ــ (ــ٤) | < ε

إذن

١٠ : |س ــ ٣ | < δ ⇐ | (س^{٢} ــ ٣ س ــ ٤) ــ (ــ٤) | < ε

تبين الخطوات من ١ إلى ١٠ أنه

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ = أصغر { $\frac{ε}{٤}$ ، ١ }

بحيث أن

لكل س فى مجال { (س ، س^{٢} ــ ٣ س ــ ٤) }

| س ــ ٣ | < δ ⇐ (س^{٢} ــ ٣ س ــ ٤) ــ (ــ٤) | < ε

وهو التقرير الذى يعنى أن { (س ، س^{٢} ــ ٣ س ــ ٤) } متصلة عند ٣ .

---

٣ - ١٣ : أثبت أن د = { (س ، ص) | ص = س^{٢} ــ ٣ س ــ ٤ ، س ∈ ح } متصلة عند ٢

يجب أن نبين أنه

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

| س — ٢ | < δ ⇐ | (س^{٢} — ٣ س — ٤) — (−٦) | < ε

اســتكشاف :

أ : | (س^{٢} — ٣ س — ٤) — (−٦) | < ε

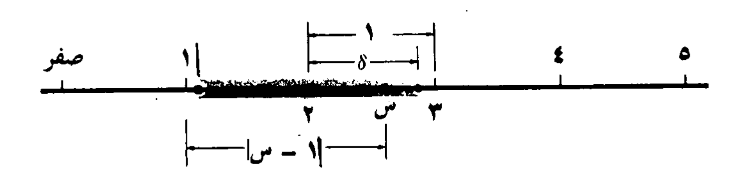
ب : | س^{٢} — ٣ س + ٢ | < ε

حـ : | س — ١ | | س — ٢ | < ε

ء : ٢ | س — ٢ | < ε إذا كانت δ ≥ ١

هـ : | س — ٢ | < $\frac{ε}{٢}$

فى الخطوة (ء) عوضنا بالقيمة ٢ بدلا من | س — ١ | لأن | س — ١ | لن تكون أبدا أكبر من ٢ إذا كانت س تنتمى لجوار نصف قطره ١ للنقطة ٢ . وبعبارة أخرى نقول أنه إذا كانت ١ < س < ٣ ، فإن صفر < س — ١ < ٢ .



إننا لا نصر على أن (حـ) تؤدى إلى (ء) ولكن على أن (ء) لابد وأن تؤدى إلى (حـ) . وإذا كان المقدار « الكبير » ٢ | س — ٢ | أصغر من ε فإن المقدار « الصغير » | س — ١ | | س — ٢ | يكون أصغر من ε .

البرهـــان :

١ : فى مقابل ε معطاة اختر δ مساوية لأصغر العددين $\frac{ε}{٢}$ ، ١ ، أى δ = أصغر { $\frac{ε}{٢}$ ، ١ } .

٢ : إذا كان | س — ٢ | < δ فإن

٣ : | س — ٢ | < $\frac{ε}{٢}$ ، | س — ٢ | < ١ .

٤ : ٢ | س — ٢ | < ε ، ٢ — ١ < س < ٢ + ١

٥ : ٢ | س — ٢ | < ε ، صفر < س — ١ < ٢

٦ : ٢ | س — ٢ | < ε ، | س — ١ | < ٢

نظرا لأن (٦) تقرر أن | س — ١ | < ٢ ، فإننا نستطيع التعويض بالمقدار | س — ١ | بدلا من ٢ فى ٢ | س — ١ | < ε ، لأن التعويض سيجعل الطرف الأيمن من المتباينة أكثر صغرا .

٧ : | س — ١ | | س — ٢ | < ε

٨ : | س^٢ — ٣ س + ٢ | < ε

٩ : | (س^٢ — ٣ س — ٤) — (—٦) | < ε

إذن

١٠ : | س — ٢ | < δ ⇐ | (س^٢ — ٣ س — ٤) — (—٦) | < ε

٣ — ١٤ : إذا أعطيت ε مساوية للمقدار ٠,٠١ ، فأى قيمة للعدد δ يمكنك أن تختار لضمان تحقق الشروط الواردة فى ٣ — ١٣ ؟

δ < ٠,٠٠٥ ، لأن $\frac{٠,٠١}{٢}$ = ٠,٠٠٥ لاحظ أن

| س — ٢ | < ٠,٠٠٥ ⇐ | د (س) — د (٢) | < ٠,٠١ .

اختبار : لتكن س = ٢,٠٠٤ . عندئذ | ٢,٠٠٤ — ٢ | < ٠,٠٠٥ ،

| [(٢,٠٠٤)^٢ — ٣(٢,٠٠٤) — ٤] — (—٦) | = ٠,٠٠٤٠١٦ < ٠,٠١

٣ — ١٥ : أثبت أن { (س ، ص) | ص = س^٢ — س — ١٢ ، س ∈ ح } متصلة عند ٥

يجب أن نبين أنه

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال { (س ، س^٢ — س — ١٢) }

| س — ٥ | < δ ⇐ | (س^٢ — س — ١٢) — ٨ | < ε

لتوفير الوقت ، سنستغنى عن الاستكشاف ونعطى البرهان مباشرة . ويستطيع الطالب اكتشاف استكشافنا بمتابعة خطوات البرهان بترتيب عكسى .

البرهـــان :

١ : لكل ε ، اختر δ = أصغر { $\frac{ε}{١٠}$ ، ١ } ، أى مساوية لأصغر العددين $\frac{ε}{١٠}$ ، ١

٢ : إذا كان | س — ٥ | < δ فإن

٣ : | س — ٥ | < $\frac{ε}{١٠}$ ، | س — ٥ | < ١

٤ : ١٠ | س — ٥ | < ε ، ٥ — ١ < س < ٥ + ١

٥ : ١٠ | س — ٥ | < ε ، ٨ < س + ٤ < ١٠

٦ : ١٠ | س — ٥ | < ε ، | س + ٤ | < ١٠

بوضع | س + ٤ | بدلا من ١٠ فى ١٠ | س ـــ ٥ | < ε ، نحصل على

٧ : | س + ٤ | | س ـــ ٥ | < ε

٨ : | س^٢ ـــ س ـــ ٢٠ | < ε

٩ : | (س^٢ ـــ س ـــ ١٢) ـــ ٨ | < ε

إذن

١٠ : | س ـــ ٥ | < δ ⇐ | (س^٢ ـــ س ـــ ١٢) ـــ ٨ | < ε

٣ ـ ١٦ : أثبت أن { (س ، ص) | ص = س^٢ + ٨ س + ٧ ، س ∈ ح } متصلة عند ـ ٧

يجب أن نثبت أنه

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال { (س ، س^٢ + ٨ س + ٧) }

| س ـــ (ـ٧) | < δ ⇐ | (س^٢ + ٨ س + ٧) ـــ صفر | < ε

باستكشاف مشابه للبرهان التالى بترتيب عكسى ، وجدنا أنه لو اخترنا δ مساوية لأصغر العددين ε/٧ ، ١ ، فإن التقرير المذكور أعلاه يكون صحيحا .

البرهـــان :

١ : لكل ε ، اختر δ = أصغر { ε/٧ ، ١ } .

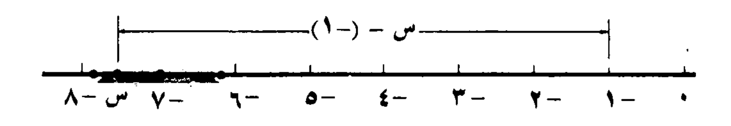
٢ : اذا كان | س ـــ (ـ٧) | < δ فإن

٣ : | س ـــ (ـ٧) | < ε/٧ ، | س ـــ (ـ٧) | < ١

٤ : | س + ٧ | < ε/٧ ، ـــ ٧ ـــ ١ < س < ـــ ٧ + ١

٥ : ٧ | س + ٧ | < ε ، ـــ ٧ < س + ١ < ـــ ٥

٦ : ٧ | س + ٧ | < ε ، | س + ١ | < ٧



إذا عوضنا بالمقدار | س + ١ | بدلا من ٧ فى ٧ | س + ٧ | < ε ، نحصل على

٧ : | س + ١ | | س + ٧ | < ε

٨ : | (س^{٢} + ٨ س + ٧) — صفر | < ε

٩ : إذن ، فقد أثبتنا أنه لكل ε ، إذا اخترنا δ = أصغر { $\frac{ε}{٧}$ ، ١ } ، فإن

| س — (−٧) | < δ ⇐ | (س^{٢} + ٨ س + ٧) — صفر | < ε

وهذا برهان على أن { (س ، ص) | ص = س^{٢} + ٨ س + ٧ ، س ∈ ح } متصلة عند — ٧ .

---

٣ – ١٧ : أى قيمة للعدد δ يمكنك اختيارها لبيان أن

| س — (−٧) | < δ ⇐ | (س^{٢} + ٨ س + ٧) — صفر | < $\frac{٧٧}{٢٢٠}$ ؟

δ ≥ $\frac{١}{٢٠}$ ، لأن $\frac{\frac{٧٧}{٢٢٠}}{٧}$ = $\frac{١١}{٢٢٠}$ = $\frac{١}{٢٠}$

قد تبدو بعض الاستكشافات غامضة أو مخادعة للقارىء الذى يكتشفها لأول مرة . تذكر دائما أن الاستكشاف يبدأ بالمتباينة | د (س) — د (حـ) | < ε ؛ وبالتعويض بأى قيمة أو صيغة تجعل الطرف الأيمن من المتباينة أكبر من أو يساوى قيمتها فى الخطوة السابقة ، نصل فى النهاية إلى المتباينة | س — حـ | < δ . تذكر : خطوات الاستكشاف هى خطوات البرهان بالترتيب العكسى .

البرهان يكون دائما برهانا شرطيا يقرر أنه إذا كان | س — حـ | < δ

فإن | د (س) — د (حـ) | < ε

---

٣ – ١٨ : أثبت أن د = { (س ، ص) | ص = $\frac{س^{٢} + س — ٦}{س^{٢} — ٤}$ ، س ∈ ح ، س ≠ ٢ ، س ≠ — ٢ } متصلة عند ٣ .

يجب أن نبين أنه

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

$$\left|\text{س} - ٣\right| < \delta \Leftarrow \left|\frac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٤} - \frac{٦}{٥}\right| < \varepsilon$$

لقيمة معطاة للعدد ε ، يمكننا ايجاد δ بالاستكشاف التالى :

استكشاف :

ﻫ : $\left|\frac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٤} - \frac{٦}{٥}\right| < \varepsilon$

ب : $\left|\frac{(\text{س} + ٣)\ (\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ٢)\ (\text{س} - ٢)} - \frac{٦}{٥}\right| < \varepsilon$

حـ : $\left|\frac{٥\ \text{س} + ١٥ - ٦\ \text{س} - ١٢}{٥\ (\text{س} + ٢)}\right| < \varepsilon$

ء : $\left|\frac{٣ - \text{س}}{\text{س} + ٢}\right| < ٥\ \varepsilon$

هـ : $\left|\frac{\text{س} - ٣}{٤}\right| < ٥\ \varepsilon$ إذا كان س $\in$ $\text{ج}_١$ (٣)

و : $\left|\text{س} - ٣\right| < ٢٠\ \varepsilon$

من الخطوة (هـ) ، إذا قيدنا δ بقيمة قصوى مقدارها ١ [مما يجعل س $\in \text{ج}_١$ (٣)] ، فإن ٢ < س < ٤ ، ٤ < س + ٢ < ٦ ، وبذا فإن $|\text{س} + ٢| \geq ٤$. إذن ، فالخطوة (هـ) ، $\frac{|\text{س} - ٣|}{٤} < ٥\varepsilon$ ، تؤدى إلى الخطوة (ء) ، $\frac{|\text{س} - ٣|}{|\text{س} + ٢|} < ٥\varepsilon$ ، ويصبح الاستكشاف بالترتيب العكسى برهانا .

٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

س

س ٢

|س + ٢|

البرهـــان :

١ : لقيمة ε معطاة ، اختر δ = أصغر { ٢٠ ε ، ١ } .

٢ : إذا كان $|\text{س} - ٣| < \delta$ ، فإن

٣ : $|\text{س} - ٣| < ٢٠\ \varepsilon$ ، $|\text{س} - ٣| < ١$

٤ : $\frac{|\text{س} - ٣|}{٢٠} < \varepsilon$ ، ٣ − ١ < س < ٣ + ١

٥ : $\frac{|س - ٣|}{(٥)\ (٤)} < ε$ ، ٤ < س + ٢ < ٦

٦ : $\frac{|س - ٣|}{(٥)\ (٤)} < ε$ ، |س + ٢| > ٤

وبما أن |س + ٢| > ٤ ، فإنه يمكننا التعويض بها بدلا من ٤ فى $\frac{|س - ٣|}{(٥)\ (٤)} < ε$ ، إذ أن التعويض سيجعل الطرف الأيمن من المتباينة أصغر .

٧ : $\frac{|س - ٣|}{٥\ |س + ٢|} < ε$

٨ : $\left|\frac{٥ س + ١٥ - ٦ س - ١٢}{٥ \ (س + ٢)}\right| < ε$

٩ : $\left|\frac{س + ٣}{س + ٢} - \frac{٦}{٥}\right| < ε$

١٠ : $\left|\frac{(س + ٣)\ (س - ٢)}{(س + ٢)\ (س - ٢)} - \frac{٦}{٥}\right| < ε$

١١ : $\left|\frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤} - \frac{٦}{٥}\right| < ε$

إذن ، لكل ε وجدنا δ = أصغر { ٢٠ ε ، ١ } بحيث أن

$$|س - ٣| < δ \Leftarrow \left|\frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤} - \frac{٦}{٥}\right| < ε$$

وهذا هو كل المطلوب من الدالة لتكون متصلة عند النقطة ٣ .

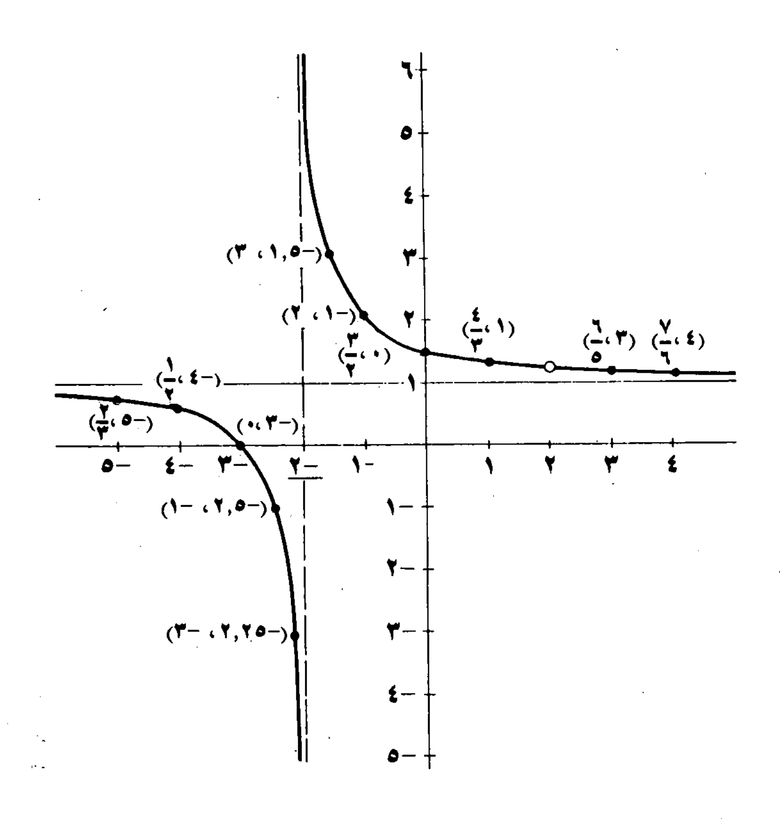
---

٣ - ١٩ : إذا أعطينا ε = ٠,٠٠١ ، فأى قيمة للعدد δ ستضمن أنه اذا كانت س ∈ $ج_δ$ (٣) ، فإن د (س) ∈ $ج_ε$ $(\frac{٦}{٥})$ وذلك للدالة فى الإطار ٣ - ١٨ ؟

δ ≤ ٠,٠٠٢

---

٣ - ٢٠ : مثل بيانيا الدالة { (س ، ص) | ص = $\frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤}$ ، س ≠ ٢ ، س ≠ -٢ ، س ∈ ح } .



٣ - ٢١ : أثبت أن د $\equiv$ { (س ، ص) | ص = $\frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤}$ ، س $\in$ ح ، س $\neq$ ٢ ، س $\neq$ -٢ } متصلة عند النقطة-٢,٥ فى مجالها .

يجب أن نبين أنه

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

$$| س - (-٢,٥) | < \delta \Leftarrow \left| \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤} - (-١) \right| < \varepsilon$$

اســتكشاف :

أ : $\left| \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - ٤} - (-١) \right| < \varepsilon$

ب : $\left| \frac{(\text{س} + ٣)\,(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ٢)\,(\text{س} - ٢)} + ١ \right| < \varepsilon$

حـ : $\left| \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ٢} + ١ \right| < \varepsilon$

ء : $\frac{|٢\,\text{س} + ٥|}{|\text{س} + ٢|} < \varepsilon$

إذا نظرنا إلى الرسم البيانى للدالة (إطار ٣ − ٢٠) ، سنلاحظ أن الدالة غير محدودة فى أى جوار للنقطة −٢ . من الضرورى أن لا تكون −٢ فى أى جوار قد نختاره للنقطة − ٢,٥ محققا لقيد متعلق بالعدد ε . يجب أن نقصر قيم س على جوار ما للنقطة − ٢,٥ لايحتوى −٢ وتكون فيه د محدودة . أى نصف قطر أصغر من $\frac{١}{٢}$ سيفى بالغرض . دعنا نقتصر على س $\in$ $\text{ج}_{\frac{١}{٤}}$ (−٢,٥) وذلك حتى **نطمئن** إلى أننا فى أمان .

إذا كانت س $\in$ $\text{ج}_{\frac{١}{٤}}$ (−٢,٥) ، فإن

$$-\frac{١١}{٤} < \text{س} < -\frac{٩}{٤}$$

$$-\frac{٣}{٤} < \text{س} + ٢ < -\frac{١}{٤}$$

$$|\text{س} + ٢| > \frac{١}{٤}$$

إذن ، فأحد اختيارات (هـ) هو

هـ : $\frac{٢\,|\text{س} + ٢,٥|}{\frac{١}{٤}} < \varepsilon$

لقد كان بإمكاننا أن نقتصر على س $\in$ $\text{ج}_{٠,١}$ (− ٢,٥) . عندئذ

$$-٢,٦ < \text{س} < -٢,٤$$

$$-٠,٦ < \text{س} + ٢ < -٠,٤$$

$$|\text{س} + ٢| > ٠,٤$$

عندئذ ستكون (هـ)

هـ : $\frac{٢\,|\text{س} + ٢,٥|}{٠,٤} < \varepsilon$

و : | س — (– ٢,٥) | < ٠,٢ ε

ز : اختر δ = أصغر { ٠,٢ ε ، ٠,١ } .

وبعبارة أخرى ، يمكننا أن نقيد س بأن تكون موجودة فى أى جوار للنقطة –٢,٥ نصف قطره أصغر من ١/٢ . سنكمل الاستكشاف والبرهان بالاقتصار على س ∈ ج

ج١/٤ (– ٢,٥) .

هـ : ٢ | س + ٢,٥ | ÷ ١/٤ < ε

و : ٢ | س — (– ٢,٥) | < ε/٤

ز : | س — (– ٢,٥) | < ε/٨

ح : اختر δ = أصغر { ε/٨ ، ١/٤ }

البرهـــان :

١ : لأى ε معطاة ، اختر δ = أصغر { ε/٨ ، ١/٤ }

٢ : إذا كان | س — (– ٢,٥) | < δ ، فإن

٣ : | س + (٢,٥) | < ε/٨ ، | س + ٢,٥ | < ١/٤

٤ : ٢ | س + ٢,٥ | < ε/٤ ، – ١١/٤ < س < – ٩/٤

٥ : | ٢ س + ٥ | ÷ ١/٤ < ε ، – ٣/٤ < س + ٢ < – ١/٤

٦ : | ٢ س + ٥ | ÷ ١/٤ < ε ، | س + ٢ | < ١/٤

δ = ١/٤

س + ٢

– ٢,٥ س – ٢ – ١,٥

δ = ١

إذا عوضنا بالمقدار $|$ س + ٢ $|$ بدلا من $\frac{١}{٤}$ فى $\frac{|٢ س + ٥|}{\frac{١}{٤}}$ > ε ، نحصل على

٧ : $\left| \frac{٢ س + ٥}{س + ٢} \right| < ε$

٨ : $\left| \frac{س + ٣}{س + ٢} + ١ \right| < ε$

٩ : $\left| \frac{(س + ٣)(س - ٢)}{(س + ٢)(س - ٢)} - (-١) \right| < ε$ ، س - ٢ ≠ صفر (لأن س ≠ ٢)

١٠ : $\left| \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤} - (-١) \right| < ε$

إذن ، د متصلة عند -٢,٥

---

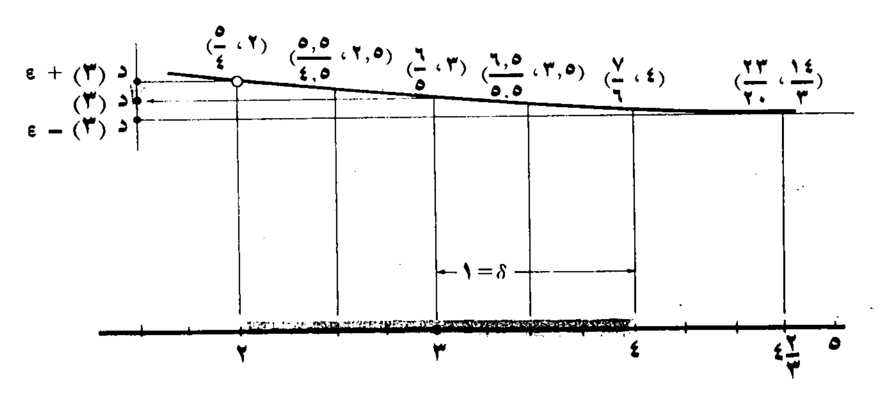
٣ - ٢٢ : إذا اعطينا ε = ٠,٠٠١ فى ٣ - ٢١ ، فأى قيمة للعدد δ ستضمن لنا أنه إذا كانت س ∈ ج$_δ$ (- ٢,٥) ، فإن د (س) ∈ ج$_ε$ (- ١) ؟

δ > ٠,٠٠٠١٢٥ . لاحظ أنه عند ٣ فى المجال يمكن أن تكون δ عشرين ضعفا للعدد ε ، بينما عند - ٢,٥ فى المجال يمكن أن تكون δ الثمن فقط من مقدار ε .

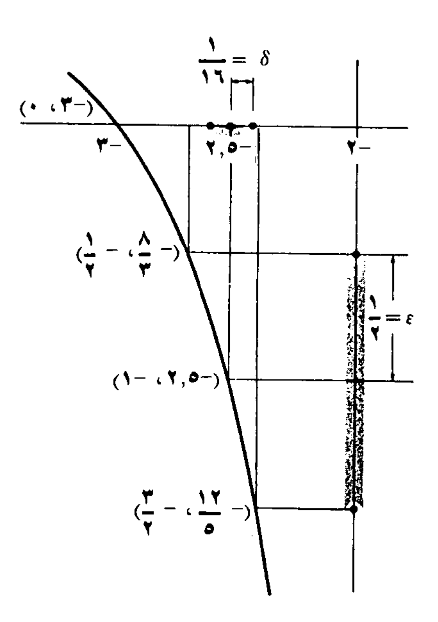
انظر إلى الرسم البيانى للدالة

$$د = \left\{ (س ، ص) \mid ص = \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤} ، س \in ح ، س \neq ٢ ، -٢ \right\}$$

بالقرب من النقطة ٣ (شكل ٣ -٦) . ان استكشافنا فى ٣ - ١٨ ينبئنا بأن قيمة مثل δ = ٢٠ε ستضمن أن $|$ د (س) - د (٣) $|$ > ε. إذا كانت ε = $\frac{١}{٢}$ ، فإن δ يمكن أن تكون ١٠ . وإذا كانت ε = $\frac{١}{٤٠}$ ، فإن δ ≥ $\frac{١}{٢}$.



شكل ٣ ـ ٦



شكل ٣ ـ ٧

من الرسم البيانى للدالة بالقرب من $-$ ٢,٥ (شكل ٣ ــ ٧) ، نجد أن القيد على δ لقيمة ε معطاة يكون أكثر تشددا إلى حد بعيد . فحتى مع قيمة كبيرة $\varepsilon = \frac{١}{٢}$ ، تكون القيمة المختارة للعدد δ هى $\frac{١}{١٦}$ فقط . ومع ذلك ، فإذا كانت | س ــ (ــ ٢,٥) | $< \frac{\varepsilon}{٨}$ ، فإن | د (س) ــ د (ــ ٢,٥) | $< \varepsilon$.

٣ ــ ٢٣ : هل الدالة د = { (س ،ص) | ص = $\frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤}$ ،س $\in$ ح، س $\neq$ ٢، س $\neq$ -٢ } متصلة عند ٢ ؟

لا ، لأننا عرفنا الاتصال عند نقط المجال فقط ، والنقطة ٢ ليست من نقط مجال د .

٣ ــ ٢٤ : هل الدالة د = { (س ، ص) | ص = $\frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤}$ ، س $\in$ ح ، س $\neq$ ٢ ، س $\neq$ -٢ } متصلة عند - ٢ ؟

لا . مرة ثانية ، – ٢ ليست من نقط مجال د .

لقد ناقشنا فى الباب الثانى نهايات المتتابعات وأعطينا تعريفا قاد إلى لعبة المهاجم والمدافع . وفى هذا الباب ناقشنا الاتصال عند نقطة وأعطينا تعريفا يقود إلى نفس اللعبة . وحيث أن المتتابعة ماهى إلا دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية ، فيبدو أنه لو قمنا بتعميم هذا التعريف بالسماح لمجال الدالة بأن يكون كل الأعداد الحقيقية ، فربما يكون بإمكاننا أن نضع تعريفا لنهاية الدالة عند نقطة . أن هذا صحيح غالبا ، وسوف نضع تعريفا للنهاية يكون مفيدا جدا عند دراسة النقط التى تكون عندها الدالة غير متصلة .

الباب الرابع

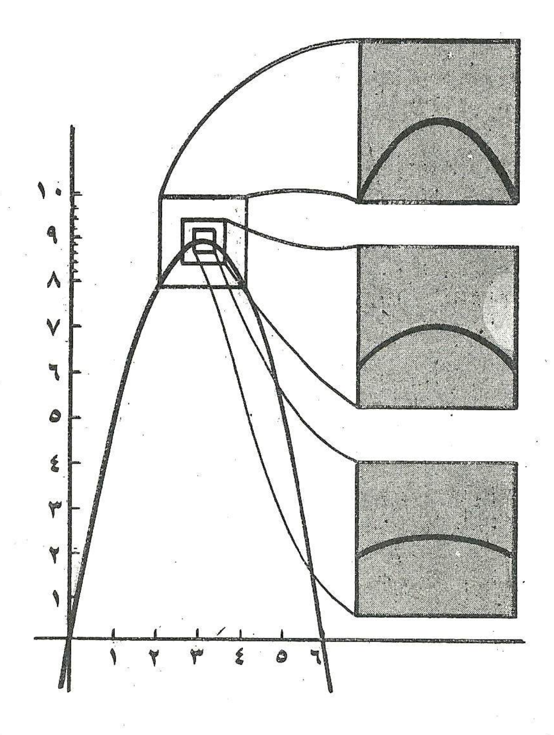
النهايات

خلال هذه الدراسة ناقشنا الموضوعات أولا بطريقة حدسية ، ثم تقدمنا تدريجيا ببطء إلى مستوى الدقة الملائم لتفهم جلى . وقد استخدمنا مداخل عديدة مختلفة للنهايات والاتصال ، لأن هذا هو الأسلوب الذى تطور به الموضوع تاريخيا .

فى شكل ٤ — ١ رسمنا منحنى الدالة {(س ، ص) | ص = ٦س — س^{٢} } .

ولكى ندرس سلوكها قرب النقطة (٣ ، ٩) صورنا تكبيرا لجزء المنحنى الواقع فى البرواز المحدد بالمستقيمات س = ٢ ، س = ٤ ، ص = ١٠ ، ص = ٨ .

ولدراسة سلوك هذه الدالة عند نقط أقرب للنقطة (٣ ، ٩) ، فقد قمنا بتكبير الصورة المكبرة . ويوضح شكل ٤ — ١ أيضا التكبير الثانى ، لجزء المنحنى الواقع فى البرواز المحدد بالمستقيمات س = ٢,٥ ، س = ٣,٥ ، ص = ٨,٢٥ ، ص = ٩,٧٥ . واذا واصلنا عمل عملية التكبير للمنحنى

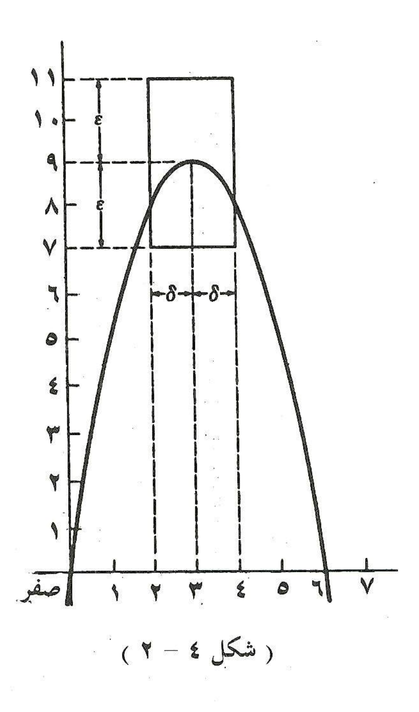


(شكل ٤ — ١)

حول رأس القطع المكافىء ، فإننا سنغفل الكثير من نقط الدالة ، ولكن كل برواز سيحوى كل نقط الدالة المعرفة لنقط جوارما للنقطة ٣ . وهذا يماثل القول بأن ٦س ـ س^{٢} تقترب من القيمة ٩ عندما تقترب س من القيمة ٣ ، الذى سنعبر عنه رمزيا على الصورة :

(٦س – س^{٢}) ← ٩ عندما س ← ٣

وإذا اعتبرنا أن ارتفاع البرواز هو ٢ ε وعرضه ٢ δ ، كما هو موضح فى شكل ٤ – ٢ ، فإن القول بأن كل برواز حول رأس القطع المكافىء يحوى جميع نقط الدالة فى جوار ما للنقطة ٣ يكافىء القول بأن الدالة متصلة عند النقطة ٣ فى مجالها . وفى الحقيقة فإن بعض الكتب تعرف الإتصال عند نقطة على هذا النحو فقط .



(شكل ٤ – ٢)

تكون الدالة د متصلة عند نقطة ب فى مجالها إذا وفقط إذا كان لكل عدد حقيقى موجب ε يوجد عدد حقيقى موجب δ بحيث يمكن رسم برواز إرتفاعه ٢ ε وعرضه ٢ δ ومركزه النقطة (ب ، د (ب)) وبحيث يكون منحنى الدالة فى الفترة (ب ـ δ ، ب + δ) مجموعة جزئية من داخلية البرواز .

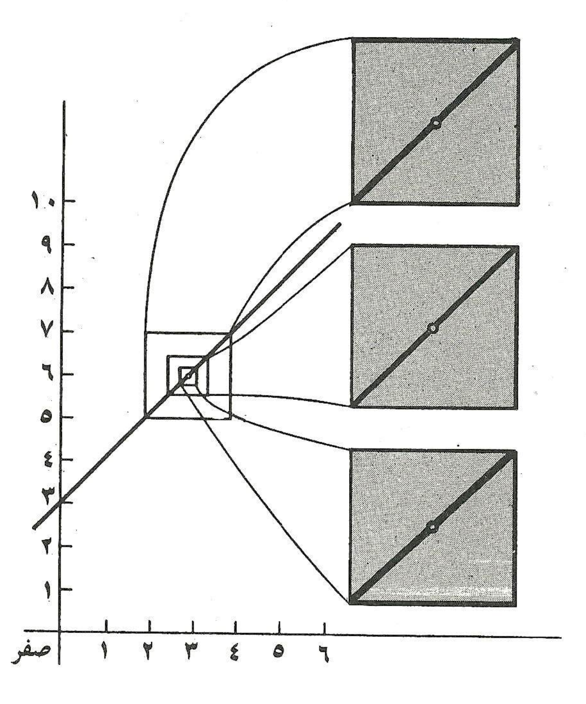
وهذا التعريف يؤكد ببساطة أن منحنى الدالة يدخل الجانب الأيسر الرأسى من البرواز ثم يعبره خارجا خلال الجانب الأيمن من البرواز دون أن يمر إطلاقا بقمة أو قاع البرواز .

وهذا النقاش عن البراويز والنهايات قد يبدو غير لازم ، حيث أننا قد استخدمنا بالفعل لغة ε ، δ في تعريف الاتصال والتى تبدو كافية لوصف سلوك الدالة ٦س – س^٢ فى أى برواز . ولكن إذا اعتبرنا نهاية الدالة

$$د = \left\{ (س ، ص) \;\middle|\; ص = \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} ، س \neq ٣ \right\}$$

عندما تقترب س من ٣ ، فإننا نلاحظ أنه من غير المعقول مناقشة القيمة د (٣) حيث أن هذه الدالة غير معرفة عند النقطة ٣ .

إن تعريفاتنا للإتصال يمكن استخدامها لنقط مجال الدالة فقط ، ولهذا فإن هذه التعريفات لا يمكن أن تكون الوسيلة الملائمة لمناقشة سلوك الدالة د حول النقطة (٣ ، ٦) .



(شكل ٤ – ٣)

ويوضح شكل ٤ – ٣ منحنى الدالة د مع عدة تكبيرات لنقاط الدالة المجاورة للنقطة(٣ ، ٦) . التكبير الأول يقع فى برواز محدد بالمستقيمات س = ٢ ، س = ٤ ، ص = ٥ ، ص = ٧ . كل التكبيرات تبدو من حيث الشكل مماثلة لشكل التكبير السابق وهذا التماثل متعمد لتبيان أن النقطة التى استبعدت ليس لها عرض . وبعبارة أخرى ، مهما كان عدد التكبيرات التى نقوم بها لهذه الدالة المعينة ، فإن الصورة الناتجة ستبدو مماثلة ، لأن الخطوط ليس لها عرض والنقط أيضا ليس لها بعد .

ليكن ارتفاع برواز ٢ε وطول قاعدته ٢δ . من الواضح أنه لأى قرب قدره ε من العدد ٦ فى المدى يمكن اختيار δ = ε كقرب قدره δ من العدد ٣ فى المجال ؛ واذا كانت س تنتمى لجوار للعدد ٣ نصف قطره δ ولكن س ≠ ٣ ، فإن د (س) ستنتمى لجوار للعدد ٦ نصف قطره ε .

وهذا سيكون تعريف أن « الدالة د متصلة عند النقطة ٣ » إذا كانت ٣ تنتمى لمجال الدالة د .

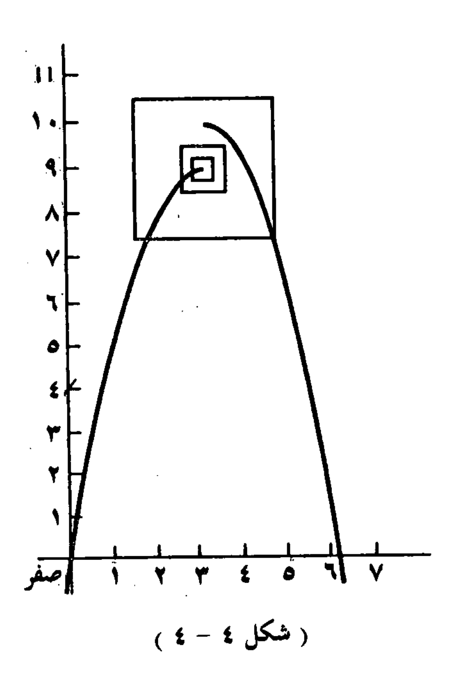
بإضافة النقطة (٣ ، ٦) إلى الدالة د نحصل على دالة جديدة م = {(س ، ص) | ص = س + ٣}
متصلة عند النقطة س = ٣ من مجالها . وحقيقة أن $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$ هى التى أوحت إلينا بالدالة الجديدة م حيث أنه إذا كانت س ≠ ٣ فإننا نستطيع قسمة كل من البسط والمقام على س − ٣ لنحصل على أن الكسر يساوى حقيقة س + ٣ عند جميع النقط على خط الأعداد الحقيقية فيما عدا عند ٣ . وليس من الضرورى أن تنتمى النقطة (٣ ، ٦) للدالة د لكى يكون للدالة د نهاية عند ٣ ، ولكن من الضرورى أن تكون الدالة الجديدة م ، التى تحتوى على النقطة (٣ ، ٦) متصلة عند ٣ .

وبعبارة أخرى ، إذا أمكنا تحويل الدالة د إلى دالة متصلة م بإضافة النقطة (٣ ، ٦) فإننا نقول أن

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = ٦$$

ونستطيع أن ننص على هذا كتعريف للنهاية :

يكون العدد الحقيقى ل نهاية د (س) عندما تقترب س من ب إذا وفقط إذا كان هناك دالة م تساوى د عند جميع نقط مجال د فيما عدا عند النقطة ب ، والنقطة (ب ، ل) تنتمى للدالة م ، والدالة م متصلة عند النقطة ب .

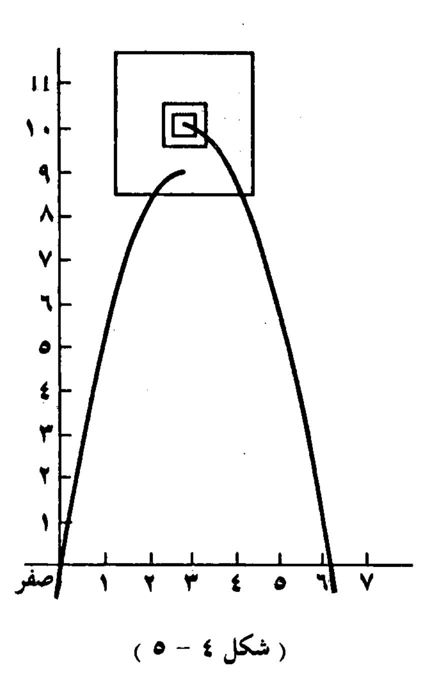


(شكل ٤ − ٤)

اعتبر الدالة ع = {(س ، ص) | ص = ٦س – س^٢ عندما س < ٣ ، ص = ٦س – س^٢ + ١ عندما س > ٣ ، س ≠ ٣ } الموضح فى شكل ٤ – ٤ رسمها البيانى مع عدة تكبيرات حول النقطة (٣ ، ٩) .

لاحظ أنه سيبدو أن بعض نقط الدالة ع الواقعة على يسار النقطة (٣ ، ٩) ستكون فى كل برواز ، ولكن نقط ع الواقعة على يمين النقطة (٣ ، ٩) لن تنتمى لأى من البراويز الصغيرة . وليس من الصحيح أنه باضافة النقطة (٣ ، ٩) الى ع سنحصل على دالة متصلة عند ٣ .

ولهذا فإننا لا نستطيع القول أن ٩ هى نهاية ع (س) عندما تقترب س من ٣ . وسنوضح فيما بعد أنه يمكن القول أن ع (س) تقترب من ٩ عندما تقترب س من ٣ من اليسار .



(شكل ٤ – ٥)

وإذا رسمنا عددا من البراويز حول النقطة (٣ ، ١٠) (شكل ٤ – ٥) ، فإن كل برواز يحتوى على نقط من ع واقعة على يمين النقطة (٣ ، ١٠) ، ولكن البراويز الصغيرة لا تحتوى على أى من نقط ع الواقعة على يسار النقطة (٣ ، ١٠) . ومرة أخرى لا نستطيع تحويل ع إلى دالة متصلة عند ٣ بإضافة النقطة (٣ ، ١٠) . ولهذا فإننا لا نستطيع القول أن ١٠ هى نهاية ع (س) عندما تقترب س من ٣، ولكننا نستطيع القول أن ع (س) تقترب من ١٠ عندما تقترب س من ٣ من اليمين .

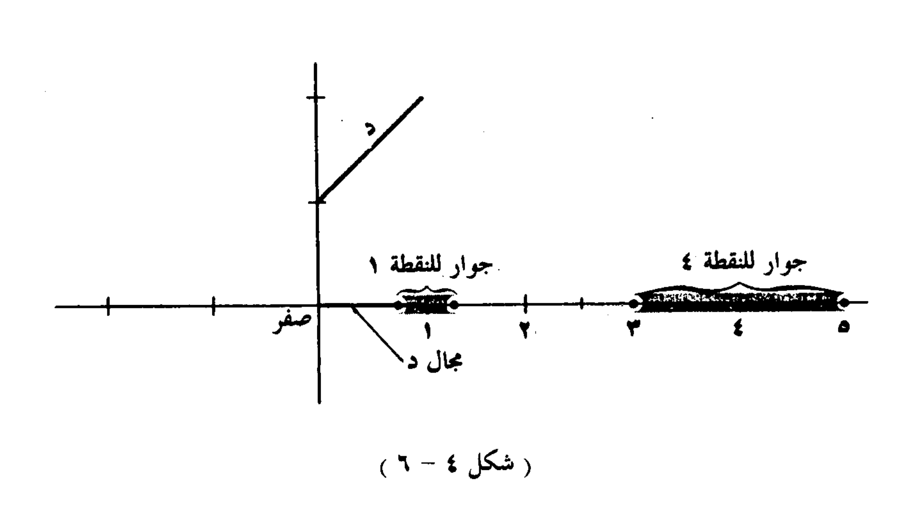
إذا كانت ل نهاية د (س) عندما تقترب س من ب من اليسار وكانت ل كذلك نهاية د (س) عندما تقترب س من ب من اليمين ، فإننا نستطيع تعريف دالة جديدة ﻫ تساوى الدالة د عند جميع النقط فيما عدا عند النقطة ب و تساوى ل عند النقطة ب . وحيث أن هذه الدالة الجديدة ﻫ متصلة عند النقطة ب ، فإننا نقول أن $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{ب}}$ د (س) = ل .

ومن الواضح أن نهاية الدالة يمكن أن تكون موجودة عند نقط لا تنتمي لمجال الدالة ، ولكن هذه النقط لابد وأن تكون قريبة جدا من المجال بحيث أن أي جوار لنقطة منها لابد وأن يحتوي على عدد لا نهائي من نقاط مجال الدالة .

تعريف ٤ – ١ :

يقال أن النقطة ب نقطة تراكم لمجموعة جزئية س من الأعداد الحقيقية إذا وفقط إذا كان أي جوار للنقطة ب يحتوي على نقطة من س مختلفة عن ب .

من الوهلة الأولى ربما يعتقد أن هذا التعريف لا يتطلب أن يحتوي كل جوار للنقطة ب على عدد لا نهائي من عناصر س. ولكن إذا كان جوار ما للنقطة ب يحتوي فقط على عدد نهائي من عناصر س، فإن النقطة الأقرب من هذه النقط تكون على مسافة δ من ب . وبالتالي فإن الجوار $ج_{δ}$ (ب) لا يحتوي على أي عنصر من عناصر س . ولكن هذا يناقض الفرض أن ب نقطة تراكم للفئة س، وبالتالي فإن أي جوار للنقطة ب لابد وأن يحتوي على عدد لا نهائي من عناصر س



(شكل ٤ – ٦)

في شكل ٤ – ٦ مثلنا بيانيا دالة معرفة على الفترة من صفر إلى ١ . لتكن

د = { (س ، ص) | ص = س + ١ ، س ∈] ٠ ، ١ [} .

نقط التراكم لمجال الدالة هما النقطتين صفر ، ١ ، وكل النقط الواقعة بين صفر وواحد . النقطة ٤ ليست نقطة تراكم لمجال الدالة د لأن جوار النقطة ٤ الذى نصف قطره ١ لا يحتوي على أي نقطة من نقط مجال الدالة د .

تعريف ٤ – ٢ :

يكون العدد الحقيقى ل نهاية د (س) عندما تقترب س من نقطة التراكم ب لمجال الدالة د إذا وفقط إذا كان

لأى عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال د
اذا كان ٠ > | س – ب | > δ ، فإن | د (س) – ل | > ε

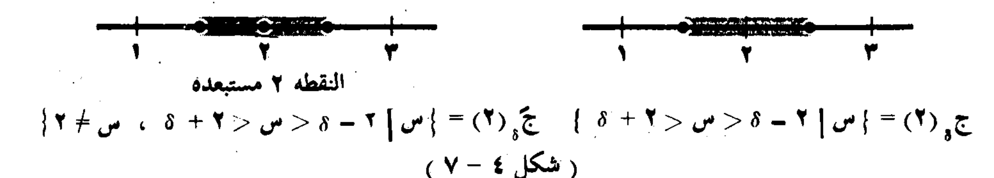
هذا التعريف للنهاية يبدو وكانه يشبه إلى حد كبير تعريف إتصال الدالة عند نقطة ما ب ، ولكنه يختلف عنه فى ثلاثة أماكن :

(١) بينما يكون الاتصال معرفا على مجال الدالة ، فإن النهاية تكون معرفة عند نقط تراكم مجال الدالة .
(٢) فى تعريف الاتصال ستسمح المتباينة | س – ب | > δ للمتغير س أن يأخذ القيمة ب ، ولكن فى تعريف النهاية لن تسمح المتباينة ٠ > | س – ب | > δ للمتغير س أن يأخذ القيمة ب .
(٣) فى تعريف الاتصال يكون | د (س) – د (ب) | > ε ، ولكن حيث أن النهاية معرفة أيضا عند نقط لا تنتمى لمجال الدالة فإننا يجب أن نعوض بالعدد ل بدلا من د (ب) فى | د (س) – د (ب) | > ε .

تعريف ٣ – ١ (معاد) :

تكون الدالة د متصلة عند النقطة ب فى مجالها إذا وفقط إذا كان
لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال د
| س – ب | > δ ⇐ | د (س) – د (ب) | > ε .

عند مناقشة النهايات سيكون من الضرورى أن نتحدث عن الجوار المثقوب . والجوار المثقوب $\bar{ج}_δ$(٢) هو نفس الجوار $ج_δ$ (٢) فيما عدا أن النقطة ٢ قد استبعدت ، كما هو موضح بشكل ٤ – ٧



$ج_δ$(٢) = { س | ٢ – δ > س > ٢ + δ } $\bar{ج}_δ$(٢) = { س | ٢ – δ > س > ٢ + δ ، س ≠ ٢ }

(شكل ٤ – ٧)

ولا يجوز أن نقول أن الدالة

$$د = \{ (س ، ص) \mid ص = \frac{س^2 - ٤}{س - ٢} ، س \neq ٢ \}$$

متصلة عند النقطة ٢ ، حيث أن هذه الدالة غير معرفة عند النقطة ٢ . ولكن ، فى كل جوار مثقوب للنقطة ٢ يكون الكسر $\frac{س^2 - ٤}{س - ٢}$ مساويا للمقدار س + ٢ .

∴ ولهذا فإننا نستطيع القول أن

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^2 - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢) (س + ٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} (س + ٢) = ٤$$

حيث انه فى تعريف النهاية لا يسمح للمتغير أن يأخذ القيمة ٢ .

عندما نقول أن $\lim_{س \to ٢} (س + ٢) = ٤$ ، فإننا نستخدم حقيقة أن س + ٢ تمثل دالة متصلة عند النقطة ٢ ، ولهذا فإن $\lim_{س \to ٢} (س + ٢) = ٢ + ٢ = ٤$ ؛ وهذا يعنى أنه يمكن ايجاد النهاية عندما تقترب س من ٢ بالتعويض عن س بالقيمة ٢ فى س + ٢ . وهذا غالبا ما ينص عليه كتعريف شكلى .

تكون الدالة د متصلة عند نقطة ب من نقط مجالها إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{س \to ب} د (س) = د (ب)$$

واذا تبنينا هذا التعريف على أنه تعريفنا الاساسى للاتصال ليحل محل التعريف بلغة ε ، δ ، فإنه كان يجب تعريف النهاية قبل تعريف الاتصال . وحيث أن مفهوم النهاية أكثر صعوبة للفهم ، فإننا اخترنا ان نعرف الاتصال أولا . وفى أغلب الاحيان فإنه ينص على هذا التعريف فى الصورة التالية :

تكون الدالة د متصلة عند نقطة ب إذا وفقط إذا كان

(١) ب تنتمى لمجال د .

(٢) $\lim_{س \to ب} د (س)$ موجودة .

(٣) $\lim_{س \to ب} د (س) = د (ب)$.

إذا أردنا معرفة نهاية س + ٣ عندما تقترب س من ٤ فى مجال الدالة

$$\{ (س ، ص) \mid ص = س + ٣ ، س \in ح \}$$

فإننا نسأل « ماهى نهاية س + ٣ عندما تقترب س من ٤ ؟ » وعندما نفعل هذا فاننا نفترض أن القارىء سيسلم جدلا بأن مجال الدالة هو ح . فاذا لم يذكر مجال الدالة د صراحة فسيفهم أنه يتكون من مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث تكون د (س) معرفة .

٤ – ١ : إذا كانت الدالة د متصلة عند النقطة حـ ، فإن $\lim_{س \leftarrow حـ}$ د (س) = د (حـ) .

لايجاد $\lim_{س \leftarrow ٠}$ (س + ٣) فإننا نعوض ببساطة عن س بالقيمة صفر فى س + ٣ .

$\lim_{س \leftarrow ٠}$ (س + ٣) = ٠ + ٣ = ٣. أوجد $\lim_{س \leftarrow ٠}$ (٢س + ٣) ؟

٣ ، حيث أن ٢ × ٠ +٣ = ٣ .

٤ – ٢ : ما هى $\lim_{س \leftarrow ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ ؟ . هذا الكسر غير معرف عند ٤ . ورغم ذلك فإن الدالة المتصلة س + ٤ تساوى $\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ عند جميع نقط أى جوار مثقوب للنقطة ٤ .

---

٨ ، حيث أن $\lim_{س \leftarrow ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} = \lim_{س \leftarrow ٤} \frac{(س + ٤) (س - ٤)}{س - ٤}$

$= \lim_{س \leftarrow ٤} (س + ٤) = ٨$

---

٤ – ٣ : ماهى $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{٩س^٢ - ٣٦}{س - ٢}$ ؟

---

٣٦ ، حيث ان $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{٩س^٢ - ٣٦}{س - ٢} = \lim_{س \leftarrow ٢} \frac{٩ (س - ٢) (س + ٢)}{س - ٢}$

$= \lim_{س \leftarrow ٢} ٩ (س + ٢) = ٣٦$

---

٤ – ٤ : ماهى $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٢ - ٤}{٢س - ٤}$ ؟

٢

---

٤ – ٥ : ماهى $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٤}{٢س - ٢}$ ؟

صفر . الدالة متصلة عند النقطة ٢ ، د (٢) = ٠ .

---

٤ – ٦ : ماهى $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(٢س)^{٢} - ٤}{٢س - ٢}$ ؟

٦. هذه الدالة متصلة عند ٢ ، ولهذا فان النهاية عندما تقترب س من ٢ تساوى د (٢) .

---

٤ – ٧ : ماهى $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(٢س)^{٢} - ٤}{٢س - ٢}$ ؟

٤. الدالة غير متصلة عند ١ ، ولكن

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(٢س)^{٢} - ٤}{٢س - ٢} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٤(س^{٢} - ١)}{٢(س - ١)} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} ٢(س + ١) .$$

والدالة ٢ (س + ١) متصلة عند ١ .

---

٤ – ٨ : ماهى نهاية $\frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٤}$ عندما تقترب س من ٣ ؟ أنظر الأطر من ٣ ـ ١٦ إلى ٣ ـ ٢٤ .

$\frac{٦}{٥}$ ، د (٣) = $\frac{٣^{٢} + ٣ - ٦}{٣^{٢} - ٤} = \frac{٦}{٥}$

---

٤ – ٩ : ما هى $\underset{س \to -٢,٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٤}$

–١ . لأن الدالة متصلة عند – ٢,٥ ، فالسؤال سهل جدا حيث أن د (– ٢,٥) = –١

---

٤ – ١٠ : ماهى $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٤}$ ؟

$\frac{٥}{٤}$. وهذا يبدو معقولا لأن

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٤} = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)(س + ٣)}{(س - ٢)(س + ٢)} = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س + ٣}{س + ٢}$$

والدالة $\frac{س + ٣}{س + ٢}$ متصلة عند ٢ .

---

٤ − ١١ : أثبت أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٤} = \dfrac{٥}{٤}$

يجب أن نثبت أن

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال $\{ (\text{س} ، \dfrac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٤}) \}$

إذا كان $٠ < |\text{س} - ٢| < \delta$ ، فإن $\left| \dfrac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٤} - \dfrac{٥}{٤} \right| < \varepsilon$

الاستكشاف التالى يتمثل فى السعى لايجاد δ كدالة فى ε المعطاة .

الاستكشـــاف :

نبدأ بالمتباينة

أ : $\left| \dfrac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٤} - \dfrac{٥}{٤} \right| < \varepsilon$

ونحاول ان نختزل الطرف الايمن حتى يصبح مماثلا للمتقدم، $٠ < |\text{س} - ٢| < \delta$ وسنستخدم اولا حقيقة أن $\text{س} \neq ٢$ وذلك بقسمة كل من بسط ومقام الكسر $\dfrac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٤}$ على $\text{س} - ٢$ لنحصل على

ب : $\left| \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ٢} - \dfrac{٥}{٤} \right| < \varepsilon$

حـ : $\left| \dfrac{٤\text{س} + ١٢ - ٥\text{س} - ١٠}{٤ (\text{س} + ٢)} \right| < \varepsilon$

ء : $\dfrac{|٢ - \text{س}|}{٤ |\text{س} + ٢|} < \varepsilon$

اننا نبحث عن النهاية عندما تقترب س من ٢ ، ولهذا اذا كانت س تنتمى لجوار مثقوب مركزه ٢ ، ونصف قطره ١ ، فان $١ < \text{س} < ٣$ ولهذا فان $٣ < \text{س} + ٢ < ٥$.

وحيث ان س + ٢ تكون دائما اكبر من ٣ فى هذا الجوار ، فإننا نستطيع ان نعوض عن س + ٢ بالقيمة ٣ فى الخطوة (ء) .

هـ : $\dfrac{|\text{س} - ٢|}{٣ \times ٤} < \varepsilon$

و : $|\text{س} - ٢| < ١٢\varepsilon$

البرهان :

١ : لأى ε معطاة ، نختار δ مساوية لاصغر العددين ١ ، ١٢ε ، أى أن

δ = أصغر $\{ ١ ، ١٢\varepsilon \}$.

٢ : اذا كان $٠ < |س - ٢| < \delta$ ، فان

٣ : $٠ < |س - ٢| < ١٢\,\varepsilon$ وكذلك $٠ < |س - ٢| < ١$

٤ : $\frac{|س - ٢|}{٣ \times ٤} < \varepsilon$ وكذلك $١ < س < ٣$ ، $س \neq ٢$.

٥ : $\frac{|س - ٢|}{٣ \times ٤} < \varepsilon$ وكذلك $٣ < س + ٢ < ٥$.

٦ : $\frac{|س - ٢|}{٣ \times ٤} < \varepsilon$ وكذلك $|س + ٢| > ٣$.

اذا وضعنا $|س + ٢|$ بدلا من ٣ فى $\frac{|س - ٢|}{٣ \times ٤} < \varepsilon$ ، نحصل على

٧ : $\frac{|-س + ٢|}{٤\,|س + ٢|} < \varepsilon$

٨ : $\frac{|٤س + ١٢ - ٥س - ١٠|}{٤\,|س + ٢|} < \varepsilon$

٩ : $\left| \frac{س + ٣}{س + ٢} - \frac{٥}{٤} \right| < \varepsilon$

١٠ : $\left| \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٤} - \frac{٥}{٤} \right| < \varepsilon$ لأن $س - ٢ \neq$

وبهذا ، فإننا نكون قد برهنا على أن

لكل ε

يوجد δ = أصغر $\{١٢\,\varepsilon ، ١\}$

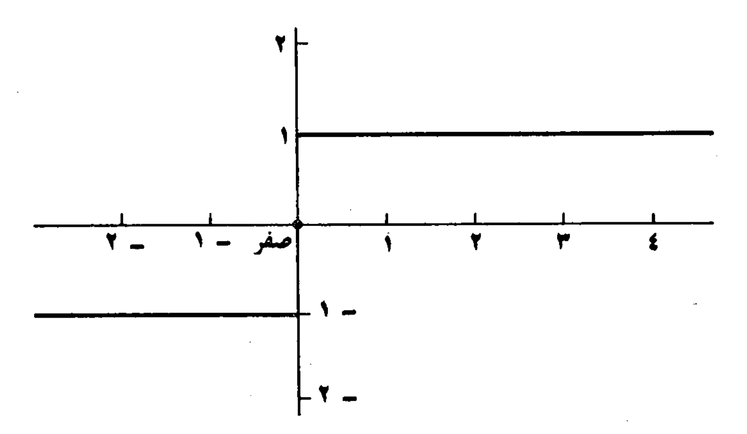
بحيث أن

لكل س فى مجال $\left\{ \left(س ، \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٤} \right) \right\}$

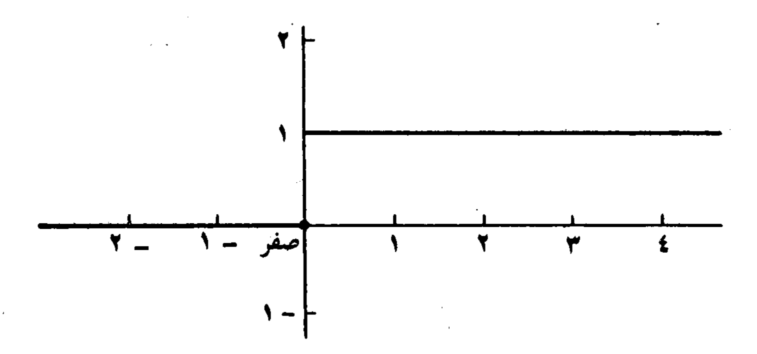
إذا كانت $٠ < |س - ٢| < \delta$ ، فان $\left| \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٤} - \frac{٥}{٤} \right| < \varepsilon$

وهذا هو التعريف المضبوط للنهاية $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٤} = \frac{٥}{٤}$.

٤ − ١٢ : فى هذا الاطار سنناقش الدالة التى قيمتها − ١ عندما $س < ٠$ ، قيمتها صفر عندما $س = ٠$ ، وقيمتها ١ عندما $س > ٠$.



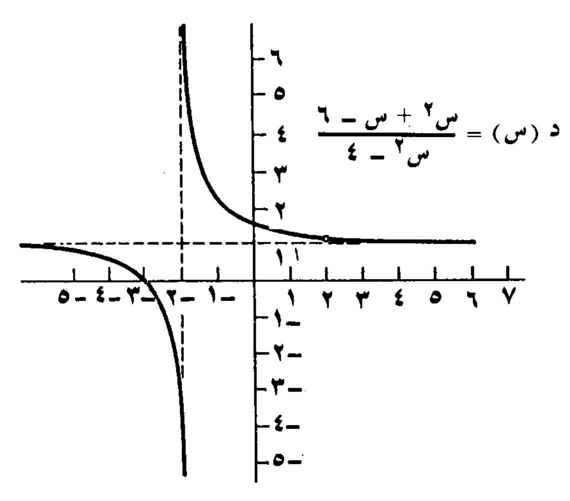
النهاية عندما س ← ٠ غير موجودة،حيث أن النقط على يمين الصفر ترسم فوق ١ ، بينما ترسم النقط على يسار الصفر فوق -١ . عندما يحدث هذا ، نقول أن النهاية تساوى ١ عندما تقترب س من الصفر من اليمين ، ولكن النهاية تساوى -١ عندما تقترب س من الصفر من اليسار . إذا كانت النهاية عندما تقترب س من الصفر من اليمين لا تساوى النهاية عندما تقترب س من الصفر من اليسار فاننا نقول أن النهاية غير موجودة . هل النهاية عندما تقترب س من الصفر من اليمين تساوى النهاية عندما تقترب س من الصفر من اليسار للدالة الآتية ؟ قيمة الدالة صفر لكل س < ٠ وقيمتها ١ لكل س > ٠ .



لا . النهاية عندما تقترب س من الصفر من اليسار تساوى صفر بينما النهاية عندما تقترب س من الصفر من اليمين تساوى ١

سنعبر عن « نهاية د (س) عندما تقترب س من ب من اليمين تساوى ل » رمزيا كالتالى :
$\underset{\text{س} \leftarrow \text{ب}^{+}}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ل . وكذلك $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ب}^{-}}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ل ستقرأ « نهاية د (س) عندما تقترب س من ب من اليسار تساوى ل » .

شكل ٤ – ٨ يمثل منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤}$. لاحظ أنه عندما س←-٢ من اليمين ، فان قيم الدالة تتزايد بدون حد . بينما عندما تقترب س من –٢ من اليسار تتناقص قيم الدالة بدون حد . ولهذا فان الدالة ليست غير متصلة فقط عند هذه النقطة ، ولكن النهاية غير موجودة عندما تقترب س من – ٢ .



(شكل ٤ – ٨)

ونستطيع تعريف النهاية عندما س ← -٢ من اليمين .

$\lim_{س \to -٢^+} \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤} = +\infty$ إذا وفقط إذا كان :

لكل عدد حقيقى موجب م

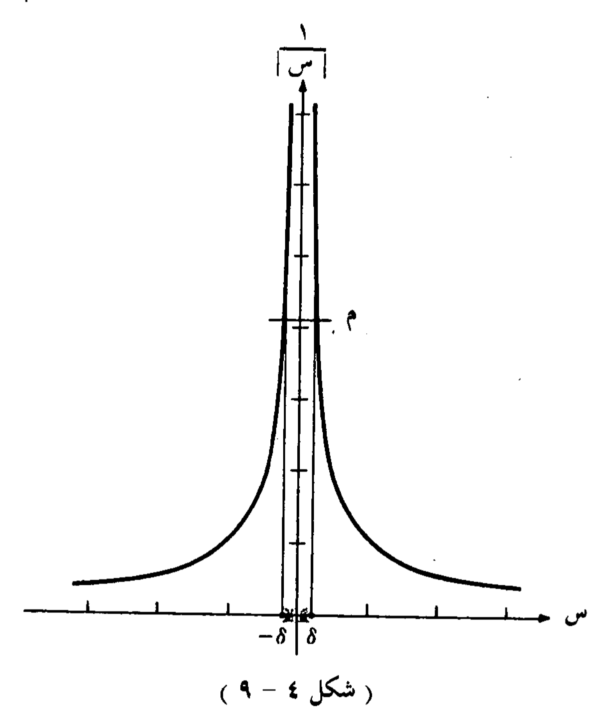
يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال $\left\{ (س ، \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤}) \right\}$

اذا كان ٠ < [س – (–٢)] < δ ، فان د (س) > م

والفكرة الجديدة المقدمة هنا هو ان الكسر $\frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤}$ يصبح كبيرا جدا عند النقط القريبة من –٢ من اليمين . والصورة الرمزية $\lim_{س \to ب}$ د(س) = +∞ تعنى ان د (س) تتزايد بدون حد عندما س ← ب . وبالمثل ، الصورة الرمزية $\lim_{س \to ب}$ د (س) = –∞ تعنى ان الدالة تتناقص بدون حد عندما س ← ب .



(شكل ٤ – ٩)

وهذا مفهوم يسهل عدم فهمه ، ولهذا فإننا سنستخدم مثالا أكثر بساطة لاستكشافه أكثر قليلا . إعتبر الدالة $\frac{1}{|س|}$ المرسومة فى شكل ٤ – ٩ . الكسر غير معرف عند النقطة س = ٠ ، ولكن عندما تقترب س من الصفر من أى جانب يزداد الكسر بدون حد .

نفرض أنه طلب منا جعل $\frac{1}{|س|}$ أكبر من ١٧ . إذا عوضنا عن س بالعدد $\frac{1}{18}$ فى $\frac{1}{|س|}$ فإننا نجد أنها تساوى ١٨ وهى قيمة أكبر من ١٧ . وبالطبع ، إذا عوضنا عن س بالعدد $-\frac{1}{18}$ فى $\frac{1}{|س|}$ فإننا نجد أن قيمتها ستكون أيضا أكبر من ١٧ . وإذا طلب منا جعل $\frac{1}{|س|}$ أكبر من ١٠٠٠٠٠٠ فإن أى تعويض عن س بقيمة أقرب إلى الصفر من $\frac{1}{1000000}$ ستجعل $\frac{1}{|س|}$ أكبر من ١٠٠٠٠٠٠ .

٤ – ١٣ : نستطيع تعريف نهاية $\frac{1}{|س|}$ عندما تقترب س من الصفر .

$\lim_{س \to 0} \frac{1}{|س|} = +\infty$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال { (س ، $\frac{1}{|س|}$) }

اذا كان $0 < |س - 0| < \delta$ ، فإن $\frac{1}{|س|} >$ م

عرف نهاية $\frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤}$ عندما تقترب س من − ٢ من اليسار .

$\underset{س \leftarrow -٢}{نهـــا} \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤} = - \infty$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال $\left\{ \left(س ، \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٤} \right) \right\}$

إذا كان ٠ < (− ٢ − س) < δ ، فإن د (س) < − م

والصورة الرمزية ٠ < | س − ب | < δ تسمح للمتغير س أن يقترب من ب من الجانبين .

وفى هذا التعريف استخدمنا ٠ < (−س − ٢) < δ بدلا من ٠ < | − ٢ − س | < δ لأننا نريد أن نناقش سلوك الكسر عندما تقترب س من − ٢ من اليسار فقط .

---

٤ − ١٤ : $\underset{س \leftarrow ب}{نهـــا}$ د (س) = + ∞ اذا وفقط اذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

إذا كان .... ، فإن ....

إذا كان ٠ < (ب − س) < δ ، فإن د (س) > م . اذا كانت س تقترب من ب من اليمين ، فإن ٠ < (س − ب) < δ . وإذا كانت س تقترب من ب من اليسار ، فإن ٠ < (ب − س) < δ . اذا كانت س تقترب من ب ، فإن ٠ < | س − ب | < δ .

---

٤ − ١٥ : $\underset{س \leftarrow ب^+}{نهـــا}$ د (س) = − ∞ اذا وفقط اذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

إذا كان .... ، فإن ....

إذا كانت ٠ < (س ــ ب) < δ ، فإن د (س) < ــ م . عندما نريد القول أن الدالة تكبر بدون حد ، نقول أن النهاية تساوى + ∞ . واذا كانت الدالة تتناقص بدون حد ، فإننا نقول أن النهاية تساوى − ∞ .

---

٤ - ١٦ : نهـــا (س ← ب⁻) د (س) = + ∞ اذا وفقط اذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م
يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

إذا كان .... ، فإن ....

إذا كانت ٠ < (ب ــ س) < δ ، فإن د (س) > م . وهذا هو كيف ننص على أن الدالة د تزداد بدون حد عندما تقترب س من ب من اليسار .

اذا اقتربت س من ب من اليسار فإننا نطرح س من ب ، واذا اقتربت س من ب من اليمين فإننا نطرح ب من س . ولم نعتبر القيمة المطلقه للفرق س ــ ب لأن هذا يعنى أن س قريبة من ب من كلا الجانبين . ومن المهم أن تكون كل من س ــ ب و ب ــ س موجبة ، ولهذا فإننا نستعمل س ــ ب عندما تقترب س من ب من اليمين ونستعمل ب ــ س عندما تقترب س من ب من اليسار .

---

٤ - ١٧ : نهـــا (س ← ب) د (س) = − ∞ اذا وفقط اذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م
يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

إذا كان .... ، فإن ....

إذا كان ٠ < ب ــ س < δ ، فإن د (س) < − م .

---

٤ - ١٨ : نهـــا (س ← ب) د (س) = + ∞ اذا وفقط اذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م
يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

إذا كان .... ، فإن ....

إذا كان ٠ < | س ــ ب | < δ ، فإن د (س) > م .

٤ - ١٩ : $\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهـا}}$ د (س) = - ∞ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

اذا كان .... ، فإن ....

إذا كان ٠ < | س ــ ب | < δ ، فإن د (س) < - م

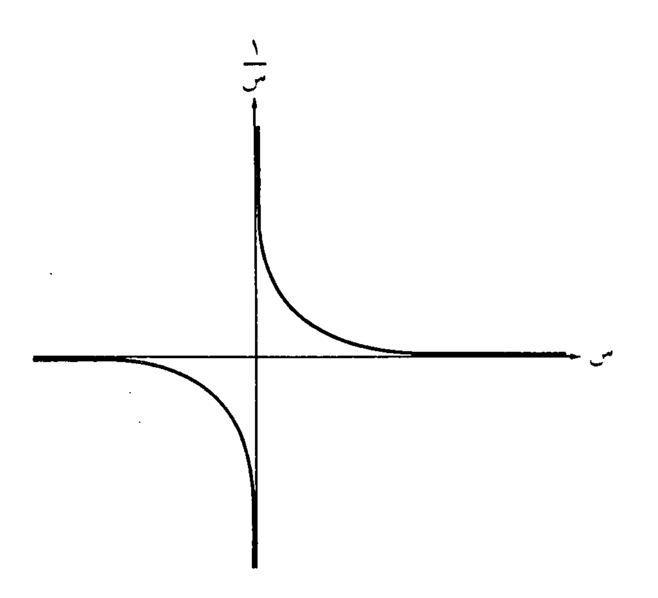
٤ - ٢٠ : ما هى نهاية $\frac{١}{س}$ عندما تؤول س إلى صفر ؟

غير معرفة.هذه النهاية غير معرفة طبقا لتعريفنا ، حيث أن النهاية من اليسار لا تساوى النهاية من اليمين .

٤ - ٢١ : ما هى نهاية $\frac{١}{س}$ عندما تؤول س إلى الصفر من اليمين ؟

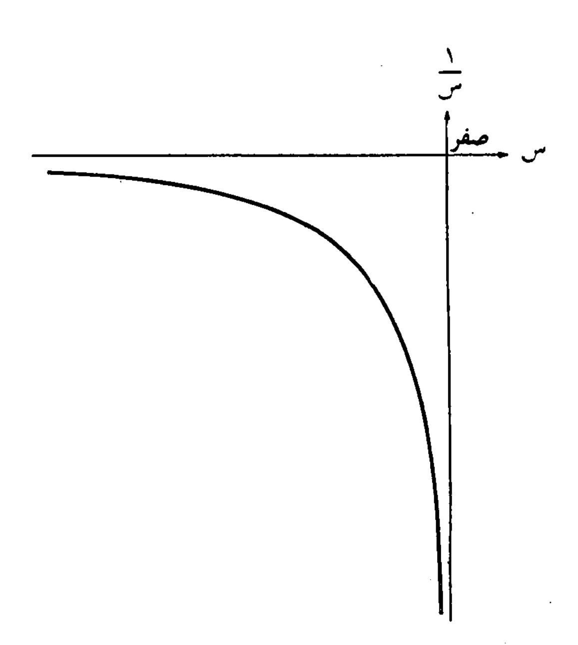
$\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}}$ $\frac{١}{س}$ = + ∞ . يمكن النظر إلى ذلك على أنه مقارنة بين م وقيمة د (س) لمعرفة أكبرهم . لأى عدد كبير م يمكن إيجاد عدد صغير δ بحيث أنه إذا كانت س قريبة بمقدار δ من الصفر من اليمين ، فإن $\frac{١}{س}$ تكون أكبر من م .

عندما نزعم أن الدالة تتزايد بدون حد ، فإننا نعنى أنها تأخذ قيما أكبر من أى عدد موجب نحدده . وعندما نزعم أن الدالة د تتناقص بدون حد ، فإننا نعنى أن د (س) تأخذ قيما أصغر من سالب أى عدد موجب نحدده .



٤ – ٢٢ : ما هى نهاية $\frac{1}{س}$ عندما تؤول س إلى الصفر من اليسار ؟

$$\lim_{س \leftarrow ٠^{-}} \frac{1}{س} = -\infty$$

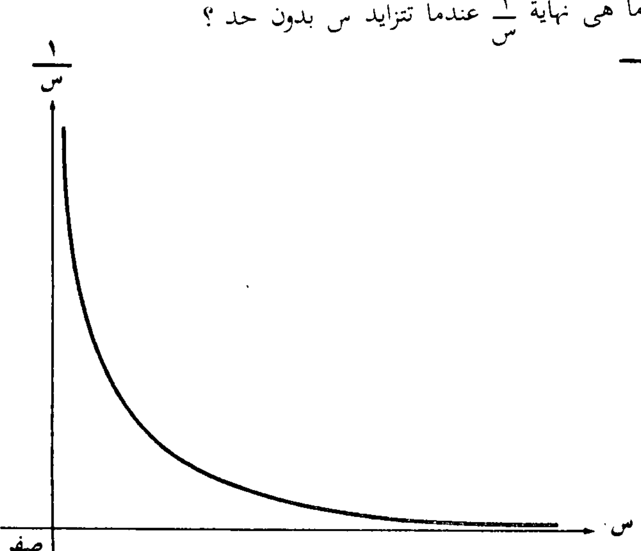


٤ - ٢٣ : ما هى نهاية $\frac{١}{س}$ عندما تؤول س إلى ٣ ؟

$\frac{١}{٣}$

---

٤ - ٢٤ : ما هى نهاية $\frac{١}{س}$ عندما تتزايد س بدون حد ؟



$\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} = ٠$ ، وذلك حيث أنه لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب ن بحيث أن :

اذا كان س > ن ، فإن ٠ < $\left| \frac{١}{س} - ٠ \right| < ε$

---

٤ - ٢٥ : ما هى نهاية $\frac{١}{س}$ عندما تتناقص س بدون حد ؟

$\lim_{س \to -\infty} \frac{١}{س} = ٠$ ، وذلك حيث أنه لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب ن

بحيث أن: س < - ن ، فإن ٠ < $\left| \frac{١}{س} - ٠ \right| < ε$

إذا كان .

من المهم ملاحظة أن الرمزين + ∞ ، - ∞ لايمكن إعتبارهما أعدادا حقيقية .

---

٤ - ٢٦ : ما هى نهاية $\frac{س + ٤}{س - ٥}$ عندما تؤول س إلى ٥ ؟

غير معرفة

---

٤ – ٢٧ : ما هى نهاية $\frac{س + ٤}{س - ٥}$ عندما تؤول س إلى ٥ من اليمين ؟

$\underset{س \leftarrow ٥^{+}}{نهـا} \frac{س + ٤}{س - ٥} = + \infty$. البسط قريب جدا من ٩ ، والمقام قريب جدا من الصفر عندما تأخذ س قيما قريبة من ٥ من اليمين . الكسر يتزايد بدون حد عندما تقترب س من ٥ من اليمين .

٤ – ٢٨ : ماهى نهاية $\frac{س + ٤}{س - ٥}$ عندما تؤول س إلى ٥ من اليسار ؟

$\underset{س \leftarrow ٥^{-}}{نهـا} \frac{س + ٤}{س - ٥} = - \infty$. الكسر سالب لقيم س الواقعة بين – ٤ و ٥ ويتناقص بدون حد عندما تقترب س من ٥ من اليسار .

٤ – ٢٩ : ماهى نهاية $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ عندما س ← – ٢⁺ ، س ← – ٢⁻ ، س ← – ٢ ؟

– ∞ ، + ∞ ، غير معرفة .

بسط هذا الكسر يقترب من – ٥ بينما يقترب مقامه من الصفر . الكسر يتناقص بدون حد عندما تؤول س إلى – ٢ من اليسار ، ويتزايد بدون حد عندما تؤول س إلى – ٢ من اليمين ، ولاتوجد له نهاية عندما تقترب س من – ٢ من كلا الجانبين .

٤ – ٣٠ : ناقش سلوك $\frac{س^{٢} + ٣}{س^{٢} - س}$ عندما تؤول س إلى ١

البسط يؤول إلى ٤ عندما تؤول س إلى ١ ، وعندما تقترب س من ١ من اليمين فإن المقام يكون موجبا ويقترب من الصفر .

$$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نهـا} \frac{س^{٢} + ٣}{س^{٢} - س} = + \infty .$$

وعندما تقترب س من ١ من اليسار ، فإن المقام يكون سالبا ويؤول إلى الصفر .

$$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{نهـا} \frac{س^{٢} + ٣}{س^{٢} - س} = - \infty .$$

نهاية $\frac{س^{٢} + ٣}{س^{٢} - س}$ عندما تقترب س من ١ غير معرفة .

٤ – ٣١ : ماهى نهاية $\frac{س^{٢} + س - ٢}{س + ٢}$ عندما تؤول س إلى – ٢ ؟

$\underset{س \to -٢}{نهـــا} \frac{س^{٢} + س - ٢}{س + ٢} = -٣$. كل من البسط والمقام يقترب من الصفر عندما تؤول س إلى – ٢ . وإذا نظرنا إلى الدالة المتصلة الممثلة بالصيغة س – ١ والتى تساوى $\frac{(س - ١)(س + ٢)}{س + ٢}$ لكل قيمة من قيم س ماعدا س = – ٢ ، فإننا نرى أن النهاية تساوى – ٣ .

تذكر دائما أننا نتعامل مع جوار مثقوب للعدد – ٢ فى مجال الدالة التى يمثلها الكسر .

٤ – ٣٢ : ماهى نهاية $\frac{(هـ + حـ)^{٣} - حـ^{٣}}{هـ}$ عندما تؤول هـ إلى الصفر ؟

توجيه :

$$\underset{هـ \to ٠}{نهـــا} \frac{(هـ + حـ)^{٣} - حـ^{٣}}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{نهـــا} \frac{(هـ^{٣} + ٣ هـ^{٢} حـ + ٣ هـ حـ^{٢} + حـ^{٣}) - حـ^{٣}}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـــا} \frac{هـ^{٣} + ٣ هـ^{٢} حـ + ٣ هـ حـ^{٢}}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{نهـــا} (هـ^{٢} + ٣ هـ حـ + ٣ حـ^{٢})$$

$\underset{هـ \to ٠}{نهـــا} \frac{(هـ + حـ)^{٣} - حـ^{٣}}{هـ} = ٣ حـ^{٢}$. الصيغة ٣ حـ^٢ + ٣ هـ حـ + هـ^٢ تمثل دالة متصلة ، والنهاية عندما هـ ← صفر لدالة متصلة د عند الصفر تساوى د (٠) . فى هذه الحالة د (٠) تساوى $٣ حـ^{٢} + ٣ حـ (صفر) + (صفر)^{٢} = ٣ حـ^{٢}$.

٤ – ٣٣ : ماهى نهاية $\frac{(هـ + حـ)^{٢} - حـ^{٢}}{هـ}$ عندما تؤول هـ إلى الصفر ؟

تقدم كما فى الأطار ٤ – ٣٢ .

$$\underset{هـ \to ٠}{نهـــا} \frac{(هـ + حـ)^{٢} - حـ^{٢}}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{نهـــا} \frac{(حـ^{٢} + ٢ هـ حـ + هـ^{٢}) - حـ^{٢}}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـــا} ٢ حـ + هـ = ٢ حـ$$

٤ – ٣٤ : ماهى نهاية $\frac{٦}{س - ٣}$ عندما تؤول س إلى + ∞ ؟

صفر . إذا جربنا قيم مثل ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ ، ... ، فإن الكسر يأخذ القيم $\frac{٦}{-٢}$ ، $\frac{٦}{٧}$ ، $\frac{٦}{٩٧}$ ، $\frac{٦}{٩٩٧}$ ، $\frac{٦}{٩٩٩٧}$ ، ... ومن الواضح أن هذا الكسر يقترب جدا من الصفر عندما

تزداد س بدون حد .

ولإثبات أن $\lim_{س \to +\infty} \frac{٦}{س - ٣} = ٠$ ، فإنه يجب إثبات أن

لكل عدد حقيقي موجب ε
يوجد عدد حقيقي موجب ن
بحيث أن
لكل س فى مجال $\left\{ (س ، \frac{٦}{س - ٣}) \right\}$
$س > ن \Leftarrow \left| \frac{٦}{س - ٣} - ٠ \right| < \varepsilon$

وهذا يمكن عمله باختيار ن = $\frac{٦ + ٣\varepsilon}{\varepsilon}$.

---

٤ – ٣٥ : ماهى نهاية $\frac{٦}{س - ٣}$ عندما تؤول س إلى $-\infty$ ؟

صفر . إذا جربنا سالب كل عدد من الأعداد التى جربناها فى المسألة السابقة ، فإن الكسر يأخذ القيم $\frac{٦}{-٤}$ ، $\frac{٦}{-١٣}$ ، $\frac{٦}{-١٠٣}$ ، $\frac{٦}{-١٠٠٣}$ ، $\frac{٦}{-١٠٠٠٣}$ ، $\frac{٦}{-١٠٠٠٠٣}$ ، ... ، ومن الواضح أن قيم الكسر تقترب من الصفر .

ولإثبات أن $\lim_{س \to -\infty} \frac{٦}{س - ٣} = ٠$ ، فإنه يجب اثبات أن

لكل عدد حقيقي موجب ε
يوجد عدد حقيقي موجب ن
بحيث أن
لكل س فى مجال $\left\{ (س ، \frac{٦}{س - ٣}) \right\}$
$س < -ن \Leftarrow \left| \frac{٦}{س - ٣} - ٠ \right| < \varepsilon$

واختيار ن = $\frac{٦ - ٣\varepsilon}{\varepsilon}$ يحقق هذه المتطلبات .

---

٤ – ٣٦ : ماهى نهاية $\frac{-٤}{س^٢ + ٣}$ عندما تؤول س إلى $-\infty$ ؟

صفر .

---

٤ – ٣٧ : ماهى $\lim_{س \to +\infty} \frac{٤ س^٢ - ٣ س + ٢}{٣ س^٢ - ٦ س + ١}$ ؟

$\frac{٤}{٣}$. وهنا كل من البسط والمقام يؤول إلى $+\infty$ عندما تؤول س إلى $+\infty$. بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$ ، نحصل على الكسر $\frac{٤ - \frac{٣}{س} + \frac{٢}{س^٢}}{٣ - \frac{٦}{س} + \frac{١}{س^٢}}$. وعندما تزداد س بدون حد ، فإن قيمة هذا الكسر تؤول إلى $\frac{٤}{٣}$.

---

٤ – ٣٨ : ماهى $\lim_{س \to -\infty} \frac{٤ س^٢ - ٣ س + ٢}{٣ س^٢ - ٦ س + ١}$ ؟

$\frac{٤}{٣}$. إذا قسمنا كل من البسط والمقام على $س^٢$ كما فى أعلاه ، ثم أخذنا النهاية ، فإن قيمة الكسر تؤول إلى $\frac{٤}{٣}$. ومن المسموح به القسمة على $س^٢$ طالما كانت س لا تساوى الصفر ، وحيث أن س تتناقص بدون حد فإنها لاتساوى الصفر .

---

٤ – ٣٩ : ماهى $\lim_{س \to +\infty} \frac{٥ س^٢ - ٣ س}{٢ س^٣ + ٢ س}$ ؟

صفر . بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$ فإننا نحصل على $\frac{\frac{٥}{س} - \frac{٣}{س^٢}}{٢ + \frac{٢}{س^٢}}$ والتى تؤول إلى الصفر عندما تزداد س بدون حد .

---

٤ – ٤٠ : ماهى $\lim_{س \to +\infty} \frac{س^٢ - ٣}{٣ - س^٢}$ ؟

-١

---

٤ – ٤١ : ماهى $\lim_{س \to -\infty} \frac{س^٦ - ٣ س^٥ - ٤ س^٤ - ٢ س^٣ - س - ١}{٣ س^٦ + ٤ س^٥ - ٣ س^٤ - ٢ س^٣ - ٢ س - ٩}$ ؟

$\frac{١}{٣}$. بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٦$ ، فإن معاملات الحدود ذات الأس الأكبر هى فقط التى تؤثر فى النهاية .

---

٤ – ٤٢ : ماهى $\lim_{س \to +\infty} \frac{أ س^ن + ب س^{ن-١} + \ldots + هـ}{حـ س^م + د س^{م-١} + \ldots + ك}$ إذا كانت م = ن ، $حـ \neq ٠$ ؟

$\frac{أ}{حـ}$.

---

٤ – ٤٣ : يمكن إستخدام المتطابقة الجبرية $أ^٢ - ب^٢ = (أ - ب)(أ + ب)$ لإيجاد نهايات بعض الكسور التى تحتوى على جذور . إذا طلب منا إيجاد $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{\sqrt{٤ + هـ} - \sqrt{٤}}{هـ}$ ، فإننا نستطيع استخدام المتطابقة المذكورة أعلاه مع وضع $أ = \sqrt{٤ + هـ}$ و $ب = \sqrt{٤}$ ، ومن ثم

$$\frac{\sqrt{٤ + هـ} - \sqrt{٤}}{هـ} \cdot \frac{\sqrt{٤ + هـ} + \sqrt{٤}}{\sqrt{٤ + هـ} + \sqrt{٤}} = \frac{(٤ + هـ) - ٤}{هـ(\sqrt{٤ + هـ} + \sqrt{٤})}$$

$$= \frac{هـ}{هـ(\sqrt{٤ + هـ} + \sqrt{٤})} = \frac{١}{\sqrt{٤ + هـ} + \sqrt{٤}}$$

وهذا كسر مكافىء للكسر الأصلى ، ونهاية $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{١}{\sqrt{٤ + هـ} + \sqrt{٤}} = \frac{١}{٤}$

ماهى $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{\sqrt{٩ + هـ} - \sqrt{٩}}{هـ}$ ؟ ضع $أ = \sqrt{٩ + هـ}$ ، $ب = \sqrt{٩}$.

$\frac{١}{٦}$

٤ – ٤٤ : ماهى $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{\sqrt{س} - \sqrt{٣}}{س - ٣}$ ؟ إستخدم المتطابقة المذكورة فى ٤ – ٤٣ مع وضع

$أ = \sqrt{س}$ ، $ب = \sqrt{٣}$

$$\frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٣}} = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$$

٤ – ٤٥ : ماهى $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{\sqrt[٣]{هـ + ٩} - \sqrt[٣]{٩}}{هـ}$ ؟

توجيــــه :

$أ^٣ - ب^٣ = (أ - ب)(أ^٢ + أ ب + ب^٢)$. ضع $أ = \sqrt[٣]{هـ + ٩}$ ، $ب = \sqrt[٣]{٩}$

$\frac{١}{٣\sqrt[٣]{٩^٢}}$. لأن $\frac{\sqrt[٣]{هـ + ٩} - \sqrt[٣]{٩}}{هـ}$

$$= \frac{\sqrt[٣]{٩ + هـ} - \sqrt[٣]{٩}}{هـ} \cdot \frac{\sqrt[٣]{(٩ + هـ)^٢} + \sqrt[٣]{٩ + هـ}\sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩^٢}}{\sqrt[٣]{(٩ + هـ)^٢} + \sqrt[٣]{٩ + هـ}\sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩^٢}}$$

$$= \frac{(٩ + هـ) - ٩}{هـ(\sqrt[٣]{(٩ + هـ)^٢} + \sqrt[٣]{٩ + هـ}\sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩^٢})}$$

$$= \frac{١}{\sqrt[٣]{(٩ + هـ)^٢} + \sqrt[٣]{٩ + هـ}\sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٩^٢}}$$

ومن ثم

$$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\sqrt[3]{9+\text{هـ}} - \sqrt[3]{9}}{\text{هـ}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9^2} + \sqrt[3]{9^2} + \sqrt[3]{9^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{9^2}}$$

فى مجموعة التمارين فى نهاية هذا الكتاب ، سنجد أن التمارين من ٥١ إلى ٥٥ تكون من نفس هذا النوع . وربما يرغب الطالب المهتم فى حل هذه المسائل الآن .

وسنسرد الآن بعض التعريفات للرجوع اليها . ويستطيع القارىء تغطية أجزاء مختلفة من كل تعريف للتحقق من قدرته على كتابة هذا الجزء تماما كما هو وارد هنا ، وكذلك يستطيع أن يغفلهم ويقفز إلى الباب الخامس .

$\lim_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) = ل ، إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

$$< |\text{س} - \text{أ}| < \delta \quad \Leftarrow \quad |\text{د}(\text{س}) - \text{ل}| < \varepsilon$$

$\lim_{\text{س} \to 2}$ س^3 = ٨ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال $\{(\text{س} ، \text{س}^3)\}$

$$0 < |\text{س} - 2| < \delta \quad \Leftarrow \quad |\text{س}^3 - 8| < \varepsilon$$

$\lim_{\text{س} \to +\infty}$ د (س) = ل ، إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب ن
بحيث أن
لكل س فى مجال د

س > ن ⇐ | د (س) — ل | < ε

نهـــا (س ← + ∞) ١/س = ٠ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب ن
بحيث أن
لكل س فى مجال { (س ، ١/س) }

س > ن ⇐ | ١/س — ٠ | < ε

نهـــا (س ← ٢) د (س) = + ∞ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال د

٠ < | س — ٢ | < δ ⇐ د (س) > م

نهـــا (س ← ٣) ١/(س — ٣) = + ∞ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال { (س ، ١/(س — ٣)) }

٠ < | س — ٣ | < δ ⇐ ١/(س — ٣) > م

نهـــا (س ← + ∞) د (س) = + ∞ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م
يوجد عدد حقيقى موجب ن

بحيث أن

لكل س فى مجال د

س > ن ⇐ د (س) > م

نهـــا (س ← + ∞) س٢ = + ∞ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب ن

بحيث أن

لكل س فى مجال { (س ، س٢) }

س > ن ⇐ س٢ > م

نهـــا (س ← − ∞) د (س) = + ∞ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب ن

بحيث أن

لكل س فى مجال د

س > — ن ⇐ د (س) > م

نهـــا (س ← − ∞) د (س) = − ∞ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب ن

بحيث أن

لكل س فى مجال د

س > — ن ⇐ د (س) > — م

نهـــا (س ← + ∞) د (س) = − ∞ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب ن

بحيث أن

لكل س فى مجال د

س > ن ⇐ د (س) > — م

نهـــا (س ← م+) د (س) = ل إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال د

$$0 < (\text{س} - \text{أ}) < \delta \Leftarrow |\text{د}(\text{س}) - \text{ل}| < \varepsilon$$

$\lim_{\text{س} \to 0^{+}} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} = 1$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال $\{(\text{س} ، \frac{|\text{س}|}{\text{س}})\}$

$$0 < (\text{س} - 0) < \delta \Leftarrow \left| \frac{|\text{س}|}{\text{س}} - 1 \right| < \varepsilon$$

$\lim_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} \text{د}(\text{س}) = \text{ل}$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال د

$$0 < (\text{أ} - \text{س}) < \delta \Leftarrow |\text{د}(\text{س}) - \text{ل}| < \varepsilon$$

$\lim_{\text{س} \to 0^{-}} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} = -1$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال $\{(\text{س} ، \frac{|\text{س}|}{\text{س}})\}$

$$0 < (0 - \text{س}) < \delta \Leftarrow \left| \frac{|\text{س}|}{\text{س}} - (-1) \right| < \varepsilon$$

$\lim_{\text{س} \to \text{م}^{+}} \text{د}(\text{س}) = +\infty$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال د

$$0 < (\text{س} - \text{أ}) < \delta \Leftarrow \text{د}(\text{س}) > \text{م}$$

$\lim\limits_{س \to ٠^{+}} \frac{١}{س} = +\infty$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال $\{(س ، \frac{١}{س})\}$

$< (س - ٠) < \delta \Leftarrow \frac{١}{س} > م$

$\lim\limits_{س \to ٠^{-}} \frac{١}{س} = -\infty$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال $\{(س ، \frac{١}{س})\}$

$٠ > (س - ٠) > \delta \Leftarrow \frac{١}{س} > -م$

$\lim\limits_{س \to -\infty} س^{٢} = +\infty$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب ن

بحيث أن

لكل س فى مجال $\{(س ، س^{٢})\}$

$س < -ن \Leftarrow س^{٢} > م$

$\lim\limits_{س \to +\infty} س^{٢} = +\infty$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب ن

بحيث أن

لكل س فى مجال $\{(س ، س^{٢})\}$

$س > ن \Leftarrow س^{٢} > م$

$\lim\limits_{س \to -\infty} -س^{٢} = -\infty$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب ن

بحيث أن

لكل س فى مجال { (س ، — س٢) }

س > — ن ⇐ — س٢ < — م

نهـــــــا — س٢ = — ∞ إذا وفقط إذا كان
س ← + ∞

لكل عدد حقيقى موجب م

يوجد عدد حقيقى موجب ن

بحيث أن

لكل س فى مجال { (س ، — س٢) }

س > ن ⇐ — س٢ < — م

تكون د متصلة عند النقطة ب من مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

| س — ب | < δ ⇐ | د (س) — د (ب) | < ε

التعريفات الأربعة التالية خاصة بالدوال التى مجالها الأعداد الطبيعيه (المتتابعات) :

نهـــــــا دن = ل إذا وفقط إذا كان
س ← ∞

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد طبيعى ن

بحيث أن

ن ≥ ن ⇐ | دن — ل | < ε

نهـــــــا $\frac{1}{٢ن}$ = ٠ إذا وفقط إذا كان
ن ← ∞

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد طبيعى ن

بحيث أن

ن ≥ ن ⇐ | $\frac{1}{٢ن}$ — ٠ | < ε

نهـــــــا (٣ + $\frac{(-1)^{ن}}{ن}$) = ٣ إذا وفقط إذا كان
ن ← ∞

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد طبيعى ن

بحيث أن

$$\text{ن} \geq \text{ن} \Leftarrow \left| \left(٣ + \frac{(-١)^{\text{ن}}}{\text{ن}} \right) - ٣ \right| < \varepsilon$$

$\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{ن}^{٢} = \infty$ إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب م
يوجد عدد طبيعى ن

بحيث أن

$$\text{ن} \geq \text{ن} \Leftarrow \text{ن}^{٢} > \text{م}$$

الباب الخامس

نظريات علـى الاتصال والنهـايـات

سنعطى فى هذا الباب نصوص بعض النظريات والتعريفات المرتبطة تقليديا بالنهايات والاتصال. هذه النظريات ستعطى الطالب شيئاً راسخا للرجوع إليه كسبب لاجراء خطوة من خطوات البرهان أو كتعليل لخطوة فى المسائل التى سيصادفها مستقبلاً.

تعريف ٥ ــ ١ :

د + ر = { (س ، ص) | ص = د (س) + ر (س) ، س $\in$ $\text{م}_{\text{د}} \cap \text{م}_{\text{ر}}$ }

تعرف الدالة د + ر على أنها مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث أن ص تساوى مجموع قيمتى الدالة د والدالة ر عند س ، حيث س تنتمى لكل من مجال د و مجال ر .

إذا كانت د (س) = ٣ س ــ ١ ، ر (س) = ٢س + ٣ ، فإن
(د + ر) (س) = (٣س ــ ١) + (٢س + ٣) = ٥س + ٢

تعريف ٥ ــ ٢ :

د ــ ر = { (س ، ص) | ص = د (س) ــ ر (س) ، س $\in$ $\text{م}_{\text{د}} \cap \text{م}_{\text{ر}}$ }

تعرف الدالة د ــ ر على أنها مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث أن ص تساوى الفرق بين قيمة د وقيمة ر عند س ، حيث س تنتمى لكل من مجال د ومجال ر .

إذا كانت د (س) = ٣س ــ ١ ، ر (س) = ٢س + ٣ ، فإن
(د ــ ر) (س) = (٣س ــ ١) ــ (٢س + ٣) = س ــ ٤ .

تعريف ٥ ــ ٣ :

د ر = { (س ، ص) | ص = د (س) ر (س) ، س $\in$ $\text{م}_{\text{د}} \cap \text{م}_{\text{ر}}$ } .

تعرف الدالة د ر على أنها مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث أن ص تساوى حاصل ضرب قيمتى د ، ر عند س ، حيث س تنتمى لكل من مجال د ومجال ر .

إذا كانت د (س) = ٣س — ١ ، ر (س) = ٢س + ٣ ، فإن
(د ر) (س) = (٣س — ١) (٢س + ٣) = ٦س^{٢} + ٧س — ٣ .

تعريف ٥ — ٤ :

$\frac{د}{ر}$ = { (س ، ص) | ص = $\frac{د (س)}{ر (س)}$ ، ر (س) ≠ ٠ ، س ∈ م$_{د}$ ∩ م$_{ر}$ }

تعرف الدالة $\frac{د}{ر}$ على أنها مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث أن ص تساوى خارج قسمة قيمة د على قيمة ر عند س ، ر (س) ≠ ٠ ، حيث س تنتمى لكل من مجال د ومجال ر

تعريف ٥ — ٥ :

د ∘ ر = { (س ، ص) | ص = د (ر (س))، س ∈ م$_{ر}$ ، ر (س) ∈ م$_{د}$ }

يعرف تركيب دالتين ، د ∘ ر ، على أنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث تنتمى ص لمدى د، صورة س بالدالة ر هى أصل ص بالدالة د ، وتنتمى س لمجال ر .

ويمكن أيضا التعبير عن هذا رمزيا على الصورة

د ∘ ر = { (س ، ص) | (س ، ر (س)) ∈ ر ، (ر (س) ، ص) ∈ د }

يوضح شكل ٥ — ١ تركيب الدالتين د ، ر ، أى د ∘ ر ، حيث
د = { (س ، ص) | ص = ٣س — ١ } ،
ر = { (س ، ص) | ص = ٢س + ٣ }

تحت تأثير الجزء الأول من هذا التركيب ، ترسم ر النقطة س إلى ٢س + ٣، ثم تكمل د الجزء الثانى من التركيب برسم ٢ س + ٣ إلى ٣ (٢س + ٣) — ١ .

تحت تأثير الجزء الأول من هذا التركيب ، ترسم ر النقطة ٤ إلى ١١ ، ثم ترسم د النقطة ١١ إلى ٣٢ . أيضا ترسم ر النقطة ١ إلى ٥ ، ثم ترسم د النقطة ٥ إلى ١٤ .

يوضح شكل ٥ — ٢ التركيب ر ∘ د . فى هذه الحالة ترسم د النقطة س إلى ٣س — ١ ، ثم ترسم ر النقطة ٣س — ١ إلى ٢(٣س — ١) + ٣ . التركيب ر ∘ د يرسم ٤ إلى ٢٥ . د ترسم أولاً ٤ إلى ١١ ، ثم ترسم ر النقطة ١١ إلى ٢٥ . والتركيب ر ∘ د يرسم ١ إلى ٧ . د ترسم أولاً ١ إلى ٢، ثم ترسم ر النقطة ٢ إلى ٧.

(د ∘ ر) (س) تعنى إيجاد ر (س) أولا ثم إيجاد قيمة د عند ر (س) ، وهذا يعنى أن
(د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) .

وسنعطى الآن نصوص وبراهين بعض النظريات . النظريات القليلة الأولى تبرهن الحقيقة التالية .

إذا كانت د ، ر متصلتان عند ب ، فإن :

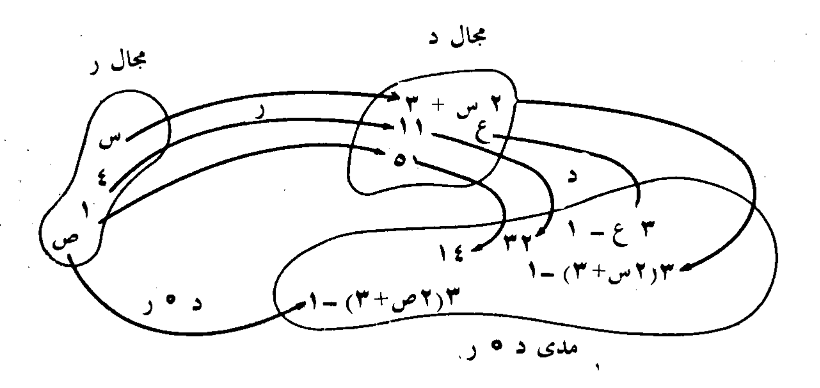
أ) د + ر تكون متصلة عند ب

ب) د ــ ر تكون متصلة عند ب

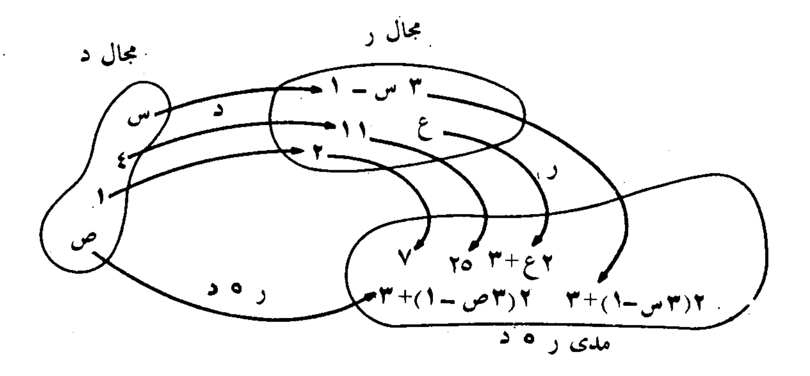
حـ) د ر تكون متصلة عند ب

ء) $\frac{د}{ر}$ تكون متصلة عند ب بشرط أن ر (ب) ≠ .

هـ) د ہ ر تكون متصلة عند ب ، بشرط أن ر (ب) ∋ مـ د ، د تكون متصلة عند ر (ب) .



شكل ٥ ـ ١



شكل ٥ ـ ٢

سنستخدم التعريفين الآتيين خلال البراهين ، ولهذا فإننا سنعطى نصوصهما هنا ثم نشير اليهما بالرمزين ت$_1$ ، ت$_2$.

ت$_1$: تكون الدالة د متصلة عند نقطة ب إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε$_1$
يوجد عدد حقيقى موجب δ$_1$
بحيث أن
لكل س فى مجال د

$$|س - ب| < δ_1 \Leftarrow |د(س) - د(ب)| < ε_1$$

ت$_2$: تكون الدالة ر متصلة عند نقطة ب إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε$_2$
يوجد عدد حقيقى موجب δ$_2$
بحيث أن
لكل س فى مجال ر

$$|س - ب| < δ_2 \Leftarrow |ر(س) - ر(ب)| < ε_2$$

نظرية ٥ــ١ :

إذا كانت د ، ر متصلتين عند ب ، فإن د + ر تكون متصلة عند ب .

البرهــان :

١ : لأى عدد معطى ε ، خذ $ε_1 = ε_2 = \frac{ε}{٢}$. من تعريفى ت$_1$ ، ت$_2$ ،

٢ : توجد δ$_1$ ، δ$_2$ تحققان ت$_1$ ، ت$_2$

٣ : إختر δ = أصغر { δ$_1$ ، δ$_2$ } . وهذا الاختيار للعدد δ يضمن لنا أنه إذا كان .

٤ : $|س - ب| < δ$

فإن

٥ : $|د(س) - د(ب)| < ε_1 = \frac{ε}{٢}$ ، $|ر(س) - ر(ب)| < ε_2 = \frac{ε}{٢}$

جمع هاتين الصيغتين يعطى

٦ : $|د(س) - د(ب)| + |ر(س) - ر(ب)| < \frac{ε}{٢} + \frac{ε}{٢} = ε$

ولكن

٧ : $|د(س) - د(ب) + ر(س) - ر(ب)| \leq |د(س) - د(ب)| + |ر(س) - ر(ب)|$

ومنها نستنتج أن

٨ : | [د (س) + ر (س)] — [د (ب) + ر (ب)] | < ε

أو

| (د + ر) (س) — (د + ر) (ب) | < ε

٩ : إذن إذا كان | س — ب | < δ ، فإن | (د + ر) (س) — (د + ر) (ب) | < ε

وهذا بالضبط هو شرط أن تكون د + ر متصلة عند ب .

نظرية ٥ — ٢ :

إذا كانت ر متصلة عند ب ، فإن — ر تكون متصلة عند ب .

البرهان :

١ : لأى عدد معطى ε ، خذ $\varepsilon_{٢} = \varepsilon$ ، $\delta = \delta_{٢}$. إذا كان

٢ : | س — ب | < δ

فإن

٣ : | ر (س) — ر (ب) | < $\varepsilon_{٢} = \varepsilon$

ولكن من خواص القيمة المطلقة ،

٤ : | ر (س) — ر (ب) | = | [— ر (س)] — [— ر (ب)] |

ومن ثم

٥ : | [— ر (س)] — [— ر (ب)] | < ε

وهذا يثبت أن — ر تكون متصلة عند ب .

نظرية ٥ — ٣ :

إذا كانت د ، ر متصلتين عند ب ، فإن د — ر تكون متصلة عند ب .

البرهـــان :

من نظريتى ٥ — ١ ، ٥ — ٢ ،

١ : د + (— ر) تكون متصلة عند ب

ولكن حيث أن د + (— ر) = د — ر ،

٢ : د — ر تكون متصلة عند ب .

نظرية ٥ — ٤ :

إذا كانت د ، ر متصلتين عند ب ، فإن د ر تكون متصلة عند ب .

البرهــــان :

١ : لأى عدد معطى ε ، خذ ε_1 ، ε_2 > صفر بحيث أن

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \left|\text{ر (ب)}\right| + \varepsilon_2 \left|\text{د (ب)}\right| < \varepsilon$$

وهذا يمكن عمله بسهولة بجعل ε_1 ، ε_2 صغيرتين بالقدر الكافى بحيث أن $\varepsilon_1\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{٣}$ ، $\varepsilon_1 \left|\text{ر (ب)}\right| < \frac{\varepsilon}{٣}$ ، $\varepsilon_2 \left|\text{د (ب)}\right| < \frac{\varepsilon}{٣}$.

ويجب ملاحظة أن إختيار ε_1 ، ε_2 ليس نتيجة فهم خفى للمسألة ، ولكنه يتعين بإتباع خطوات البرهان بالعكس بدءا بالنتيجة المطلوبة وذلك لتعيين ما هو مطلوب

٢ : إختار δ = أصغر { δ_1 ، δ_2 } . إذا كان

٣ : $\left|\text{س} - \text{ب}\right| < \delta$

فإن

٤ : $\left|\text{د (س)} - \text{د (ب)}\right| < \varepsilon_1$ ، $\left|\text{ر (س)} - \text{ر (ب)}\right| < \varepsilon_2$

ضرب هاتين الصيغتين يعطى

٥ : $\left|\text{د (س) ر (س)} - \text{د (ب) ر (س)} - \text{ر (ب) د (س)} + \text{د (ب) ر (ب)}\right| < \varepsilon_1\varepsilon_2$

ولكننا نود أن يكون الطرف الأيمن من (٥) هو

$\left|\text{د (س) ر (س)} - \text{د (ب) ر (ب)}\right|$. ولهذا ، فإننا نجمع

$\left|\text{د (ب) ر (س)} + \text{ر (ب) د (س)} - ٢\ \text{د (ب) ر (ب)}\right|$ على كل من طرفى (٥) ونطبق النتيجة العامة $\left|\text{س} + \text{ص}\right| \leq \left|\text{س}\right| + \left|\text{ص}\right|$ على الطرف الأيمن .

٦ : $\left|\text{د (س) ر (س)} - \text{د (ب) ر (ب)}\right| <$

$\varepsilon_1\varepsilon_2 + \left|\text{د (ب) ر (س)} + \text{ر (ب) د (س)} - ٢\ \text{د (ب) ر (ب)}\right|$

٧ : $\leq \varepsilon_1\varepsilon_2 + \left|\text{د (ب)}\right| \left|\text{ر (س)} - \text{ر (ب)}\right| + \left|\text{ر (ب)}\right| \left|\text{د (س)} - \text{د (ب)}\right|$

٨ : $< \varepsilon_1\varepsilon_2 + \left|\text{د (ب)}\right| \varepsilon_2 + \left|\text{ر (ب)}\right| \varepsilon_1$

٩ : $< \varepsilon$

١٠ : ومن ثم ، إذا كان $\left|\text{س} - \text{ب}\right| < \delta$ ، فإن $\left|\text{د ر (س)} - \text{د ر (ب)}\right| < \varepsilon$

وهذا يثبت أن د ر تكون متصلة عند ب .

نظرية ٥ – ٥ :

إذا كانت ر متصلة عند ب ، ر (ب) $\neq$ ٠ ، فإن $\frac{١}{\text{ر}}$ تكون متصلة عند ب .

قبل بدء البرهان الفعلى ، سنقدم التمهيد الرمزى التالى .

إذا أعطينا $\varepsilon' = \frac{\left|\text{ر (ب)}\right|}{٣}$ ، فإنه باستخدام ت_2 يوجد عدد δ' بحيث أن

$|\text{س} - \text{ب}| < \delta' \Leftarrow |\text{ر (س)} - \text{ر (ب)}| < \varepsilon'$

ومن ثم

أ : $|\text{ر (س)} - \text{ر (ب)}| < \dfrac{|\text{ر (ب)}|}{٣}$

ب : $|\text{ر (ب)} - \text{ر (س)}| < \dfrac{|\text{ر (ب)}|}{٣}$

حـ : $|\text{ر (ب)}| - |\text{ر (س)}| < \dfrac{|\text{ر (ب)}|}{٣}$

ء : $- |\text{ر (ب)}| + |\text{ر (س)}| < - \dfrac{|\text{ر (ب)}|}{٣}$

هـ : $|\text{ر (س)}| < \frac{٢}{٣} |\text{ر (ب)}|$

وكذلك

و : $\dfrac{١}{|\text{ر (س)}|} < \dfrac{٣}{٢ |\text{ر (ب)}|}$

البرهـــان :

١ : لأى ε معطاة ، خذ $\varepsilon'' = \frac{٢}{٣} |\text{ر (ب)}|^{٢}$ ، إذن يوجد δ'' بحيث أن

$|\text{س} - \text{ب}| < \delta'' \Leftarrow |\text{ر (س)} - \text{ر (ب)}| < \varepsilon''$

٢ : نختار δ = أصغر { δ' ، δ'' } . إذا كان

٣ : $|\text{س} - \text{ب}| < \delta$

فإن

٤ : $|\text{ر (س)} - \text{ر (ب)}| < \varepsilon''$

إذا ضربنا (٤) فى

(و) : $\dfrac{١}{|\text{ر (س)}|} < \dfrac{٣}{٢} \dfrac{١}{|\text{ر (ب)}|}$

نحصل على

٥ : $\dfrac{|\text{ر (س)} - \text{ر (ب)}|}{|\text{ر (س)}|} < \dfrac{٣}{٢} \dfrac{\varepsilon''}{|\text{ر (ب)}|}$

وبضرب كل من الطرفين فى $\dfrac{١}{|\text{ر (ب)}|}$ نحصل على

٦ : $\dfrac{|\text{ر (س)} - \text{ر (ب)}|}{|\text{ر (س) ر (ب)}|} < \dfrac{٣}{٢} \dfrac{\varepsilon''}{|\text{ر (ب)}|^{٢}}$

$$٧ : \left| \frac{١}{ر\,(ب)} - \frac{١}{ر\,(س)} \right| < \frac{٣}{٢} \frac{\varepsilon'}{\left| ر\,(ب) \right|^{٢}} = \frac{٣}{٢} \frac{١}{\left| ر\,(ب) \right|^{٢}} \cdot \frac{٢}{٣} \left| ر\,(ب) \right|^{٢} \varepsilon = \varepsilon$$

$$٨ : \left| \frac{١}{ر\,(س)} - \frac{١}{ر\,(ب)} \right| < \varepsilon$$

ومن ثم

$$\left| س - ب \right| < \delta \Leftarrow \left| \frac{١}{ر\,(س)} - \frac{١}{ر\,(ب)} \right| < \varepsilon$$

وهذا يثبت أن $\frac{١}{ر}$ تكون متصلة عند ب .

نظرية ٥ - ٦ :

إذا كانت د ، ر متصلتين عند ب وكانت ر (ب) $\neq$ ٠ ، فإن $\frac{د}{ر}$ تكون متصلة عند ب .

البرهــان :

$\frac{د}{ر}$ = د ($\frac{١}{ر}$).وحيث أن نظرية ٥ - ٥ تثبت أن $\frac{١}{ر}$ متصلة عند ب ، فإنه ينتج أن $\frac{د}{ر}$ متصلة عند ب وفقا لنظرية ٥ - ٤ .

نظرية ٥ - ٧ :

إذا كانت الدالة ر متصلة عند ب والدالة د متصلة عند ر (ب) ، فإن الدالة د ∘ ر تكون متصلة عند ب .

إذا كانت د متصلة عند ر (ب) ، فإن

أ : لكل عدد حقيقى موجب $\varepsilon_{١}$

يوجد عدد حقيقى موجب $\delta_{١}$

بحيث أن

لكل ر (س) فى مجال د

$$\left| ر\,(س) - ر\,(ب) \right| < \delta_{١} \Leftarrow \left| د\,(\,ر\,(س)\,) - د\,(\,ر\,(ب)\,) \right| < \varepsilon_{١}$$

وتكون ر متصلة عند ب إذا وفقط إذا كان

ب : لكل عدد حقيقى موجب $\varepsilon_{٢}$

يوجد عدد حقيقى موجب $\delta_{٢}$

بحيث أن

$$\left| س - ب \right| < \delta_{٢} \Leftarrow \left| ر\,(س) - ر\,(ب) \right| < \varepsilon_{٢}$$

البرهـــان :

١ : لأى عدد معطى ε ، نضع $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ، $\varepsilon_2 = \delta_1$. إذا كان

٢ : $|س - ب| < \delta_2$

٣ : فإن

$|ر(س) - ر(ب)| < \varepsilon_2$

ولكن $\varepsilon_2 = \delta_1$ ، ومن ثم باستخدام (أ)

٤ : $|د(ر(س)) - د(ر(ب))| < \varepsilon_1$

وبالتالى

٥ : $|س - ب| < \delta_2 \Leftarrow |د(ر(س)) - د(ر(ب))| < \varepsilon$

وهذا بالضبط هو المطلوب لأن تكون د ه ر متصلة عند ب .

نظرية ٥ - ٨ :

الدالة الثابتة ث = { (س ، ص) | ص = أ ، حيث أ ثابت } متصلة عند كل نقطة من نقط مجالها .

البرهـــان :

حيث أن $|ث(س) - ث(ب)| = |أ - أ| = ٠$ ، وحيث أن $\varepsilon > ٠$ ، فإننا نستنتج أن $|ث(س) - ث(ب)| < \varepsilon$ بغض النظر عن إختيار δ . وبالتالى ، فإن ث تكون متصلة عند أى نقطة ب من نقط مجالها .

نظرية ٥ - ٩ :

دالة الوحدة ت = { (س ، ص) | ص = س } متصلة عند كل نقطة من نقط مجالها .

البرهـــان :

حيث أن $|ت(س) - ت(ب)| = |س - ب|$ ، فإنه ينتج مباشرة أنه لأى عدد $\delta \leq \varepsilon$ ، $|س - ب| < \delta \Leftarrow |س - ب| < \varepsilon$. وبالتالى فإن دالة الوحدة تكون متصلة عند كل نقطة ب من نقط مجالها .

تعريف ٥ - ٦ :

الدالة ك تكون دالة كثيرة حدود إذا وفقط إذا كان يمكن تعريفها بصيغة على الصورة :

$$ك(س) = ب_٠ س^ن + ب_١ س^{ن-١} + \ldots + ب_{ن-٢} س^٢ + ب_{ن-١} س + ب_ن$$

حيث ن عدد صحيح موجب ، ب ، ب$_١$ ، ... ، ب$_ن$ أعدادا حقيقية .

نظرية ٥ — ١٠ :

دالة كثيرة الحدود متصلة عند ب لأى عدد حقيقى ب .

البرهـــان :

نفرض أن ك (س) أى دالة كثيرة حدود . تذكر من نظرية ٥ — ٨ ونظرية ٥ — ٩ أن الدوال المعرفة بالصيغة ث (س) = أ و ت (س) = س متصلة عند ب . بتكرار تطبيق نظرية ٥ — ٤ ، الدالة أ سم تكون متصلة عند ب لأى ثابت أ ولأى عدد صحيح موجب م . ومن ثم فإن كل حد من حدود ك (س) يكون دالة متصلة عند ب . بتكرار تطبيق نظرية ٥ — ١ ، ينتج أن الدالة ك متصلة عند ب.

تعريف ٥ — ٧ :

الدالة ق تكون دالة قياسية (كسرية) إذا وفقط إذا كان ق = $\frac{ك}{ف}$ حيث ك ، ف كثيرتى حدود .

نظرية ٥ — ١١ :

الدالة القياسية ق = $\frac{ك}{ف}$ تكون متصلة عند كل نقطة ب بشرط أن ف (ب) ≠ ٠

البرهـــان :

من نظرية ٥ — ١٠ ، كل من ك ، ف دالة متصلة عند ب . ومن ثم اذا كان ف (ب) ≠ ٠ ، فإن ق تكون متصلة عند ب وذلك من نظرية ٥ — ٦ .

نظرية ٥ — ١٢ :

نفرض أن ب نقطة تراكم لمجال د . التقارير التالية تكافىء التقرير « الدالة د متصلة عند النقطة ب من نقط مجالها » :

(١) لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال د
| س — ب | < δ ⟸ | د (س) — د (ب) | < ε

(٢) لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن

{ (س ، ص) ∈ د | | (س — ب) | < δ } ⊇ { (س ، ص) | | س — ب | < δ ، |ص — د (ب) | < ε }

(٣) $\lim_{س \to ب}$ د (س) = د (ب)

(٤) $\lim_{هـ \to ٠}$ د (ب + هـ) = د (ب) .

البرهان :

بالتعريف ، (١) يكافىء القول أن د متصلة عند ب . ولهذا يكفى إثبات أن (١) يؤدى إلى (٢) ، (٢) يؤدى إلى (٣) ، (٣) يؤدى إلى (٤) ، (٤) يؤدى إلى (١) .

برهان أن (١) ⇐ (٢) :

(١) تنص على أن لكل ε > ٠ ، يوجد δ > ٠ بحيث أن لكل س فى مجال د ، | س ـ ب | < δ يؤدى إلى | د (س) ـ د (ب) | < ε . لنكتب

ى = { (س ، ص) | | س ـ ب | < δ } ،

ـــ = { (س ، ص) | | س ـ ب | < δ ، | ص ـ د (ب) | < ε } .

يجب إثبات أن ، لكل ε > ٠، يوجد δ > ٠ بحيث أن ى ⊇ ـــ وبقول آخر، لهذين العددين ε ، δ ، (س ، د (س)) ∋ ى ⇐ (س ، د (س)) ∋ ـــ لكل ε > ٠ ، نختار العدد δ > ٠ المستخدم فى (١) . إذا كانت (س ، د (س)) ∋ ى ، فإن | س ـ ب | < δ . من (١) ، ينتج أن | د (س) ـ د (ب) | < ε . ومن هذا ينتج أن (س ، د (س)) ∋ ـــ ، ومن ثم فإن (١) يؤدى إلى (٢) .

برهان أن (٢) ⇐ (٣) :

لكل ε > ٠ ، نختار δ > ٠ كالمعطاة فى (٢) . إذن لكل س فى مجال د ، إذا كان | س ـ ب | < δ أى (س ، د (س)) ∋ ى ، فإن (س ، د (س)) ∋ ـــ ، وهذا يعنى أن | د (س) ـ د (ب) | < ε . وحيث أن هذا صحيح لكل س فى مجال د بحيث | س ـ ب | < δ ، فإنها لابد وأن تكون صحيحة لكل س فى مجال د وتحقق الشروط | س ـ ب | > ٠ و | س ـ ب | < δ . ولهذا فإنه

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

٠ < | س ـ ب | < δ ⇐ | د (س) ـ د (ب) | < ε

حيث أن ب نقطة تراكم لمجال د ، فإن هذا يكافىء $\lim_{س \to ب}$ د (س) = د (ب) . إذن (٢) يؤدى إلى (٣) .

برهان أن (٣) ⇐ (٤) :

إذا وضعنا ب + هـ بدلاً من س فى كل مكان فى تعريف $\lim_{س \to ب}$ د (س) = د (ب) ، فإننا نحصل على

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل ب + هـ فى مجال د

٠ < | هـ — ٠ | < δ ⇐ | د (هـ + ب) — د (ب) | < ε

وهذا هو النص على أن نهـــا (هـ ← ٠) د (ب + هـ) = د (ب) . وبالتالى فإن (٣) ⇐ (٤) .

برهان أن (٤) ⇐ (١) :

إذا أزلنا ، فى التعريف المذكور أعلاه للنهاية نهـــا (هـ ← ٠) د (ب + هـ) = د (ب) ، الشرط أن | هـ — ٠ | لا تساوى الصفر ، فيجب إثبات أن

| هـ — ٠ | = ٠ ⇐ | د (ب + هـ) — د (ب) | < ε

| هـ — ٠ | = ٠ فقط إذا كان هـ = ٠ . وفى هذه الحالة ،

د (ب + هـ) = د (ب + ٠) = د (ب).

ومن ثم | د (ب + هـ) — د (ب) | = | د (ب) — د (ب) | = ٠ ، وهذا أقل من أى ε ، لأن ε > ٠ . ولهذا ، فإننا نكتب

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل ب + هـ فى مجال د

| هـ — ٠ | < δ ⇐ | د (ب + هـ) — د (ب) | < ε

وإذا وضعنا س — ب مكان هـ ، فإن هذا يصبح

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال د

| س — ب | < δ ⇐ | د (س) — د (ب) | < ε

وهذا يثبت أن (٤) يؤدى إلى (١) وبهذا يكتمل البرهان .

نظرية ٥ – ١٣ :

إذا كانت نهـــا (س ← ب) د (س) = $ل_١$ ، نهـــا (س ← ب) د (س) = $ل_٢$ ، فإن $ل_١$ = $ل_٢$.

من الفرض :

لكل عدد حقيقى موجب $\varepsilon_{١}$

يوجد عدد حقيقى موجب $\delta_{١}$

بحيث أن

(أ) : $٠ < |س - ب| < \delta_{١} \Rightarrow |د(س) - ل_{١}| < \varepsilon_{١}$

وكذلـــك

لكل عدد حقيقى موجب $\varepsilon_{٢}$

يوجد عدد حقيقى موجب $\delta_{٢}$

بحيث أن

(ب) : $٠ < |س - ب| < \delta_{٢} \Rightarrow |د(س) - ل_{٢}| < \varepsilon_{٢}$

البرهـــان :

١ : نفرض أن $ل_{١} \neq ل_{٢}$. إذن توجد مسافة $\varepsilon > ٠$ بين $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ ، أى أن

٢ : $|ل_{١} - ل_{٢}| = \varepsilon > ٠$

بالرجوع إلى (أ) و (ب) وبأخذ

٣ : $\varepsilon_{١} = \varepsilon_{٢} = \frac{\varepsilon}{٣}$ ، $\delta =$ أصغر $\{\delta_{١} ، \delta_{٢}\}$

إذا كان

٤ : $٠ < |س - ب| < \delta$ ،

فإن

٥ : $|د(س) - ل_{١}| < \frac{\varepsilon}{٣}$ ، $|د(س) - ل_{٢}| < \frac{\varepsilon}{٣}$

ومن هذا

٦ : $|د(س) - ل_{١}| + |د(س) - ل_{٢}| < \frac{\varepsilon}{٣} + \frac{\varepsilon}{٣}$

٧ : $|ل_{١} - د(س)| + |د(س) - ل_{٢}| < \frac{٢}{٣}\varepsilon$

٨ : $|ل_{١} - د(س) + د(س) - ل_{٢}| < \frac{٢}{٣}\varepsilon$

٩ : $|ل_{١} - ل_{٢}| < \frac{٢}{٣}\varepsilon$

ولكننا بدأنا البرهان بفرض أن

١٠ : $|ل_{١} - ل_{٢}| = \varepsilon > ٠$

وهذا يستلزم أن $\varepsilon < \frac{٢}{٣}\varepsilon$ ، أى $٣\varepsilon < ٢\varepsilon$ ، وهذا غير معقول لأن $\varepsilon > ٠$. ولهذا فإن فرضنا $ل_{١} \neq ل_{٢}$ يكون غير منطقى ، ومن ثم يجب أن نستنتج أن $ل_{١} = ل_{٢}$.

نظرية ٥ - ١٤ :

إذا كان $\lim_{س \to ب}$ د (س) = $ل_١$ وكان $\lim_{س \to ب}$ ر (س) = $ل_٢$ ، فإن

(١) $\lim_{س \to ب}$ (د + ر) (س) = $ل_١ + ل_٢$

(٢) $\lim_{س \to ب}$ (د — ر) (س) = $ل_١ - ل_٢$

(٣) $\lim_{س \to ب}$ (د ر) (س) = $ل_١ \; ل_٢$

(٤) $\lim_{س \to ب}$ $(\frac{د}{ر})$ (س) = $\frac{ل_١}{ل_٢}$ بشرط أن $ل_٢ \neq ٠$.

الخطوات التى تتبع فى إثبات هذه النظرية هى عمليا نفس الخطوات التى اتبعت فى إثبات النظريات المناظرة على الاتصال ، ولهذا فإننا سوف لا نعطى البرهان هنا .

فى النظرية التالية الرمز]أ ، حـ[سيستخدم للدلالة على الفترة المفتوحة { س : أ < س < حـ }. إذا كان هذا المفهوم جديد بالنسبة للقارىء ، فإنه يمكن قراءة الجزء الخاص به فى الملحق .

نظرية ٥ - ١٥ :

نفرض أن د (س) $\geq$ ر (س) $\geq$ ع (س) لكل س $\in$]أ ، حـ[فيما عدا ربما عند النقطة س = ب $\in$]أ ، حـ[إذا كانت $\lim_{س \to ب}$ د (س) = $\lim_{س \to ب}$ ع (س) = ل ،

فإن $\lim_{س \to ب}$ ر (س) = ل .

معطى لنا أن لكل $\varepsilon_١ > ٠$ ، $\varepsilon_٢ > ٠$ ، توجد $\delta_١ > ٠$ ، $\delta_٢ > ٠$ بحيث أن لكل س فى مجال كل من د ، ع

أ) ٠ < | س — ب | < $\delta_١$ $\Leftarrow$ | د (س) — ل | < $\varepsilon_١$

ب) ٠ < | س — ب | < $\delta_٢$ $\Leftarrow$ | د (س) — ل | < $\varepsilon_٢$

ويجب إثبات أن

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

٠ < | س — ب | < δ $\Leftarrow$ | ر (س) — ل | < ε

البرهــان :

١ : لأى $\varepsilon > ٠$ ، ضع $\varepsilon_١ = \varepsilon_٢ = \varepsilon$ ، δ = أصغر { $\delta_١$ ، $\delta_٢$ ، | ب — أ | ، | ب — حـ | }

إذا كان

٢ : $\cdot < |س - ب| < \delta$

فإن

٣ : $|د(س) - ل| < \varepsilon$ أو $ل - \varepsilon < د(س) < ل + \varepsilon$

وكذلك

$|ع(س) - ل| < \varepsilon$ أو $ل - \varepsilon < ع(س) < ل + \varepsilon$

وكذلك

٤ : $د(س) \leq ر(س) \leq ع(س)$

من (٣) ، (٤) نحصل على

٥ : $ل - \varepsilon < د(س) \leq ر(س) \leq ع(س) < ل + \varepsilon$

٦ : $ل - \varepsilon < ر(س) < ل + \varepsilon$

والتى تكافىء

٧ : $|ر(س) - ل| < \varepsilon$

إذن ،

$$\underset{س \to ب}{نهـا} ر(س) = ل$$

قد يكون من العملى أحيانا استخدام القاعدة « نهاية الدالة هى دالة النهاية » . فإذا طلب منا إيجاد $\underset{س \to ٤}{نهـا} (س + ١)^{٣}$ ، فإننا نستطيع إستخدام هذه القاعدة كالآتى :

$$\underset{س \to ٤}{نهـا} (س + ١)^{٣} = (\underset{س \to ٤}{نهـا} (س + ١))^{٣} = ٥^{٣} = ١٢٥ .$$

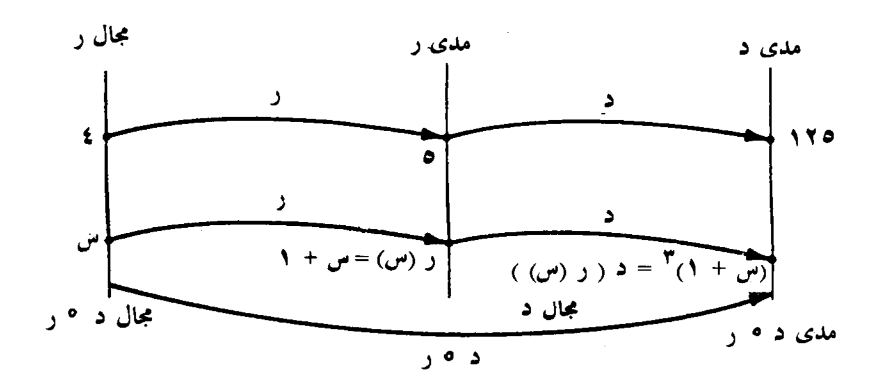
فى هذا المثال (شكل ٥ - ٣) فإننا نوجد نهاية تركيب دالتين . لتكن $د = \{ (س ، ص) | ص = س^{٣} \}$ ، $ر = \{ (س ، ص) | ص = س + ١ \}$ ، إذن $د \circ ر = \{ (س ، ص) | ص = (س + ١)^{٣} \}$.

ومن ثم ، فعندما ندع

$$\underset{س \to ٤}{نهـا} (س + ١)^{٣} = (\underset{س \to ٤}{نهـا} (س + ١))^{٣}$$

فإننا فى الواقع نستخدم حقيقة أن

$$\underset{س \to ب}{نهـا} (د \circ ر)(س) = د(\underset{س \to ب}{نهـا} ر(س))$$



شكل ٥ – ٣

هذه القاعدة صحيحة فى أغلب الاحيان فى دراسة التفاضل والتكامل ، ولكن يهمنا المرات القليلة التى تكون فيها غير صحيحة . وقد استخدمت بطريقة صحيحة فى المناقشة التالية لشكل ٥ – ٤ .

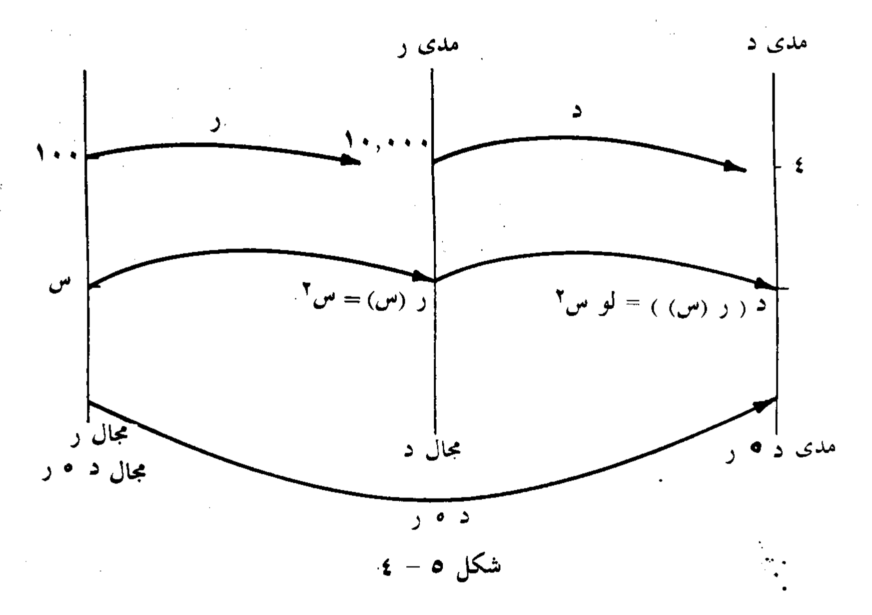
$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١٠٠} (\text{لو س}^٢) = \text{لو} \, (\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١٠٠} \text{س}^٢) = \text{لو} \, (١٠٠٠٠) = ٤$$

لتكن د = { (س ، ص) | ص = لو س } ، ر = { (س ، ص) | ص = $\text{س}^٢$ } ، إذن د ٥ ر = { (س ، ص) | ص = لو $\text{س}^٢$ } ، ولهذا فإننا حين ندع

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١٠٠} (\text{لو س}^٢) = \text{لو} \, (\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١٠٠} \text{س}^٢)$$

فإننا نستخدم حقيقة أن

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{ب}} (\text{د ٥ ر}) (\text{س}) = \text{د} \, (\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{ب}} \text{ر (س)}) \, .$$



شكل ٥ – ٤

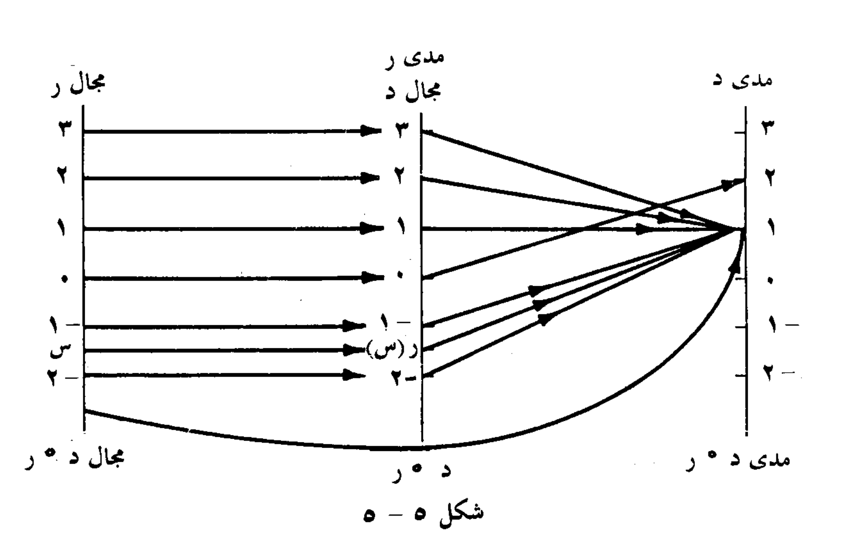
ومن ناحية أخرى ، فى شكل ٥ – ٥ لتكن ر = { (س ، ص) | ص = س } ،
د = { (س ، ص) | ص = ١ عندما س ≠ ٠ ، ص = ٢ عندما س = ٠ } .

قاعدتنا « نهاية الدالة هى دالة النهاية » لا تصلح هنا ، لأن

نهـــا د ٥ ر (س) = نهـــا د (ر (س)) = ١
س ← ٠ س ← ٠

بينمـــا

د (نهـــا ر (س)) = د (٠) = ٢
س ← ٠



شكل ٥ – ٥

وسوف ننص على ونبرهن الآن ثلاثة نظريات توضح متى يمكن تطبيق

$$\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}\left(\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} \text{ر}(\text{س})\right).$$

فى النظرية الأولى سنفرض أن د متصلة عند ر (ب) وأن ر متصلة عند ب . فى النظرية الثانية سوف لا نصر على أن تكون ر متصلة عند ب ، ولكننا سنؤكد على أن ر لها نهاية عند ب . فى النظرية الثالثة سوف نؤكد على أن ر لها نهاية عند ب وكذلك أن د لها نهاية عند ر (ب) .

نظرية ٥ – ١٦ :

إذا كانت د ، ر دالتين بحيث أن

ر متصلة عند النقطة ب ،

د متصلة عند النقطة ر (ب) ،

وكانت ب نقطة تراكم لمجال د ∘ ر ، فإن

$$\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}\left(\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} \text{ر}(\text{س})\right)$$

البرهــان :

١ : ر متصلة عند ب

د متصلة عند ر (ب)

من نظرية ٥ – ٧

٢ : د ∘ ر تكون متصلة عند ب .

إذن ، من (٣) نظرية ٥ – ١٢

٣ : $\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}\left(\text{ر}(\text{ب})\right)$

ومن تعريف التركيب

٤ : $\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}\left(\text{ر}(\text{ب})\right)$

ولكن حيث أن ر متصلة عند ب ، فمن (٣) نظرية ٥ – ١٢

٥ : $\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}\left(\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} \text{ر}(\text{س})\right)$

سنغير الآن الفرض قليلا بالتأكيد على أن ر لها نهاية عند ب بدلا من الاحتفاظ بالشرط الأقوى أن ر متصلة عند ب .

نظرية ٥ – ١٧ (شكل ٥ – ٦) :

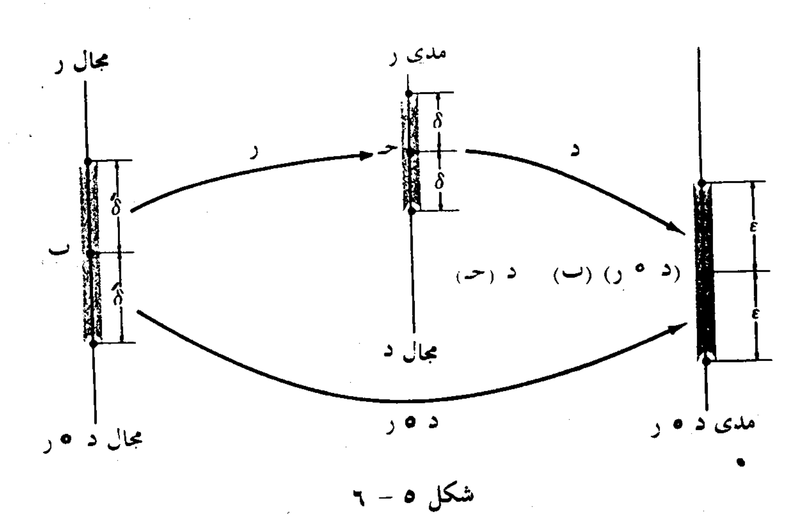
إذا كانت د ، ر دالتين بحيث أن

نهـــا س ← ب ر (س) = حـ ،

د متصلة عند حـ ،

ب نقطة تراكم لمجال د ∘ ر ، فإن

نهـــا س ← ب (د ∘ ر) (س) = د (نهـــا س ← ب ر (س))



شكل ٥ – ٦

البرهـــان :

حيث أن د متصلة عند حـ ،

١ : لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل ص فى مجال د

| ص – حـ | > δ ⇐ | د (ص) – د (حـ) | > ε

وحيث أن نهـــا س ← ب ر (س) = حـ ،

٢ : لكل عدد حقيقى موجب δ
يوجد عدد حقيقى موجب δ'

بحيث أن
لكل س فى مجال ر

$$0 < |\text{س} - \text{ب}| < \delta' \Rightarrow |\text{ر}(\text{س}) - \text{حـ}| < \delta$$

ولكن ص فى (١) هى ر (س) فى (٢) ، ولهذا فبوضع ر (س) بدلا من ص فى (١)

٣ : $|\text{ر}(\text{س}) - \text{حـ}| < \delta \Rightarrow |\text{د}(\text{ر}(\text{س})) - \text{د}(\text{حـ})| < \varepsilon$

إذن ، لكل نقطة تراكم س لمجال د ∘ ر

٤ : $0 < |\text{س} - \text{ب}| < \delta' \Rightarrow |\text{د}(\text{ر}(\text{س})) - \text{د}(\text{حـ})| < \varepsilon$

وهذا بالتعريف هو التقرير

٥ : $\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}(\text{حـ})$

ولكن

٦ : $\text{حـ} = \underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} \text{ر}(\text{س})$

إذن

٧ : $\text{د}(\text{حـ}) = \text{د}\left(\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} \text{ر}(\text{س})\right)$

من (٥) ، (٧)

٨ : $\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}\left(\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} \text{ر}(\text{س})\right)$

فى النظرية التالية سنؤكد فقط على أن د ، ر لهما نهاية عند النقط المعنية . ولن نتطلب أن تكون أيا منهما متصلة عند النقطة محل الدراسة .

نظرية ٥ – ١٨ :

إذا كانت د ، ر دالتين بحيث أن

أ : $\underset{\text{س} \to \text{ب}}{\text{نهـا}} \text{ر}(\text{س}) = \text{حـ}$

ب : $\underset{\text{ص} \to \text{حـ}}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{ص}) = \text{ل}$

حـ : يوجد عدد حقيقى موجب δ'

بحيث أن

لكل س فى مجال د ∘ ر

$$0 < |\text{س} - \text{ب}| < \delta' \Rightarrow 0 < |\text{ر}(\text{س}) - \text{حـ}| ،$$

واذا كانت ب نقطة تراكم لمجال د ٥ ر ، فإن

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow \text{ب}} (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{نهـــا}_{\text{ص} \leftarrow \text{حـ}} \text{د}(\text{ص})$$

البرهـــان :

١ : (ب) تؤكد لنا أن

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل ص فى مجال د

$$0 < |\text{ص} - \text{حـ}| < \delta \;\Leftarrow\; |\text{د}(\text{ص}) - \text{ل}| < \varepsilon$$

٢ : (أ) تؤكد لنا أن

لكل عدد حقيقى موجب δ
يوجد عدد حقيقى موجب δ''
بحيث أن
لكل س فى مجال ر

$$0 < |\text{س} - \text{ب}| < \delta'' \Leftarrow |\text{ر}(\text{س}) - \text{حـ}| < \delta$$

إذا إخترنا δ = أصغر { δ' ، δ'' } ، ووضعنا ر (س) من (٢) بدلا من ص فى (١) ، فإننا نحصل على

٣ : $0 < |\text{ر}(\text{س}) - \text{حـ}| < \delta \;\Leftarrow\; |\text{د}(\text{ر}(\text{س})) - \text{ل}| < \varepsilon$

ولكن حيث أن (حـ) تؤكد أن $0 < |\text{ر}(\text{س}) - \text{حـ}|$ ، فإننا نحصل على

٤ : $0 < |\text{س} - \text{ب}| < \delta \;\Leftarrow\; |\text{د}(\text{ر}(\text{س})) - \text{ل}| < \varepsilon$

وهذا هو النص على أن

٥ : $\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow \text{ب}} \text{د}(\text{ر}(\text{س})) = \text{ل}$

ولكن ، باستخدام (ب) ، $\text{نهـــا}_{\text{ص} \leftarrow \text{حـ}} \text{د}(\text{ص}) = \text{ل}$. إذن

٦ : $\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow \text{ب}} (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{نهـــا}_{\text{ص} \leftarrow \text{حـ}} \text{د}(\text{ص})$.

كمثال لدالتين لا تحققان فروض نظرية ٥ – ١٦ أو نظرية ٥ – ١٧ ولكنهما تحققان فروض نظرية ٥ – ١٨ ، لتكن ر = { (س ، ص) | ص = $\frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2}$ } ، د = { (س ، ص) | ص = $\frac{\text{س}^2 - 16}{\text{س} - 4}$ }.
إذا رغبنا فى إيجاد $\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow 2} (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س})$ ، فإننا لانستطيع تطبيق نظرية ٥ – ١٦ أو نظرية

٥ – ١٧ لأن ر ليست متصلة عند ٢، د ليست متصلة عند ر (٢).وفى الحقيقة ، ر ليست معرفة عند ٢ . ولكن ، ٢ نقطة تراكم لمجال د ∘ ر ،

نهـــا س ← ٢ ر (س) = ٤

نهـــا ص ← ٤ د (ص) = ٦

وإذا كانت δ′ = ١ ، فإن

٠ > | س – ٢ | > δ′ ⇐ ٠ > | ر (س) – ٤ |

وهذا يعنى أن كل فروض نظرية ٥ – ١٨ متحققة . إذن ،

نهـــا س ← ٢ (د ∘ ر) (س) = نهـــا ص ← ٤ د (ص) = ٦

إن الشيء المدهش فى هذا المثال هو أن ٢ لاتنتمى لمجال ر أو لمجال د ∘ ر ، وكذلك ٤ لاتنتمى لمجال د . ولكن ، ٢ نقطة تراكم لمجال ر ولمجال د ∘ ر ، وكذلك ٤ نقطة تراكم لمجال د .

وفى الحقيقة ، أننا لا نحتاج غالبا لهذه النظريات الكثيرة فى حساب التفاضل والتكامل اذا كانت كل النقط محل الدراسة تنتمى للمجال وكانت فى نفس الوقت نقط تراكم لمجال الدالة التى ندرسها .

وفى هذا الكتاب تجنبنا عمدا مناقشة النقط المعزولة فى مجال الدالة ، لأنه يوجد إلى حد ما عدم اتفاق على ما إذا كان يجب أن تكون الدالة متصلة عند هذه النقط . وسنناقش هذه المشكلة الآن ، باستخدام الدوال الآتية لتوضيح الفروق بين التعاريف المختلفة للاتصال . لتكن

د = { (س ، ص) | ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، س ⩾ ٠ } .

ر = { (س ، ص) | ص = –١ عندما س > –١ ،

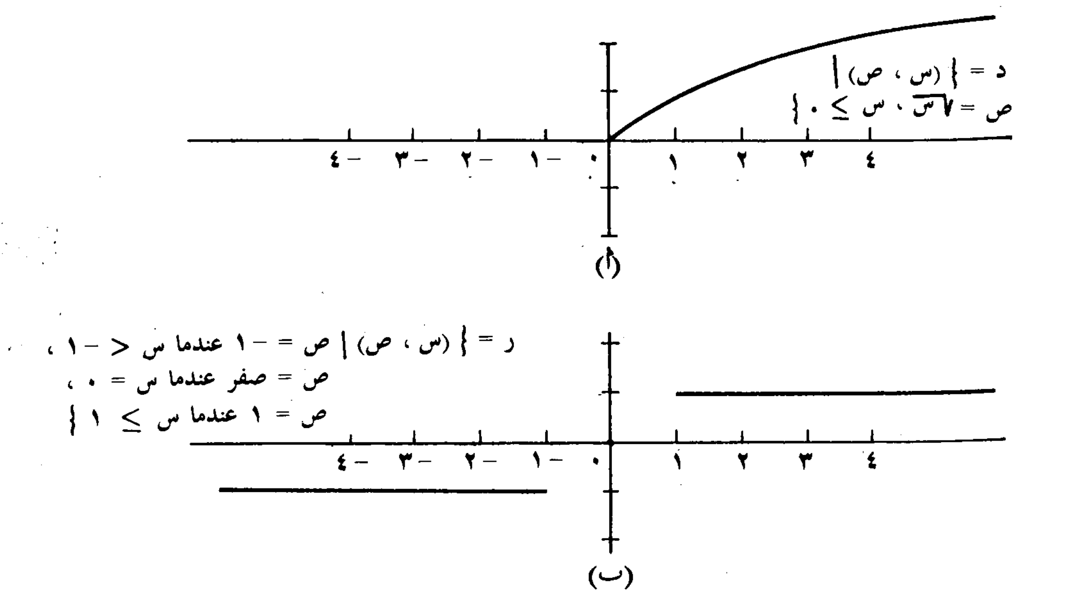
ص = ٠ عندما س = ٠ ،

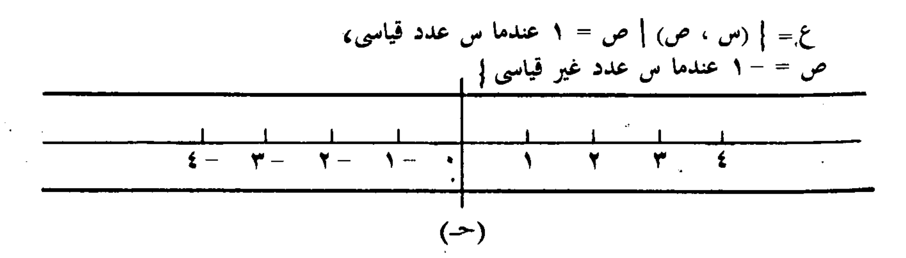
ص = ١ عندما س ⩾ ١ }

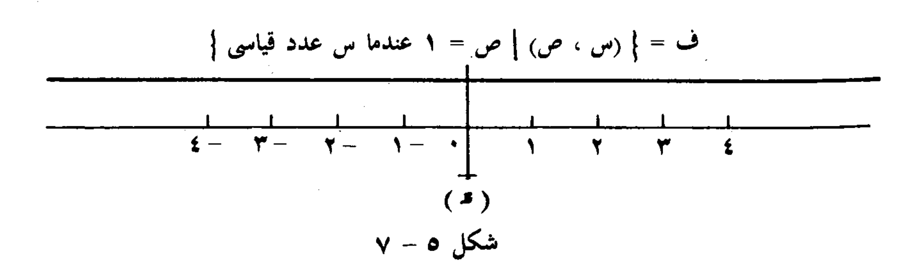
ع = { (س ، ص) | ص = ١ عندما س عدد قياسى ،

ص = –١ عندما س عدد غير قياسى }

ف = { (س ، ص) | ص = ١ عندما س عدد قياسى }







شكل ٥ − ٧

رسمنا هذه الدوال فى شكل ٥ − ٧ ، وربما يكون من المفيد النظر اليهم من وقت لآخر خلال المناقشة التالية . وطبعا من المستحيل علينا رسم كل من ع ، ف بدقة ، لأننا لا نستطيع رسم خط مستقيم يمثل فقط الأعداد القياسية . بعض المؤلفين يقصرون الاتصال عند نقطة فقط على النقط التى تكون نقط تراكم فى مجال الدالة تحت الدراسة .

وتقريبا فإن كل التعاريف التى تعرف الاتصال عن طريق النهايات تكون من هذا النوع .

تعريف بديل أ :

تكون الدالة د متصلة عند نقطة تراكم ب فى مجالها إذا وفقط إذا كان
لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال د

$$|س - ب| < \delta \quad \Leftarrow \quad |د(س) - د(ب)| < \varepsilon$$

هذا التعريف سيتفق مع تعريفنا للاتصال إذا طبقناه على الدوال فى شكل ٥ – ٧ فيما عدا عند الصفر للدالة ر . ولا يمكن حتى اعتبار أى من النقط المعزولة للمجال كبديل للنقطة ب وفقا لهذا التعريف ، لأنهم ليسوا نقط تراكم لمجال الدالة وحيث أن التعريف المعطى يصر فقط على أن تنتمى ب للمجال ، فإننا سنعتبر أن جميع النقط المعزولة للمجال هى نقط اتصال للدالة . وحيث أننا نتطلب أن تكون النقط الوحيدة س فى الفترة $|س - ٠| < \delta$ من نقط المجال ، فإن النقطة الوحيدة التى نعتبر أنها موجودة فى أى جوار نصف قطره أقل من ١ للنقطة صفر هى النقطة صفر نفسها .

الدالة ر تأخذ صفر إلى ر (٠) ، ومن ثم فوفقا لتعريفنا فان ر تكون متصلة عند النقطة صفر .

التعريف التالى الذى سنورده يتطلب أن تكون الدالة د معرفة على فترة مفتوحة تحتوى ب أو تكون ب نقطة نهاية لها . هذا التعريف لا يتفق مع تعريفنا ليس فقط عند النقطة صفر للدالة ر ولكن أيضا عند كل نقطة من نقط مجال ع ، حيث أن ع ليست معرفة على أى فترة .

تعريف بديل ب :

نفرض أن د معرفة على فترة مفتوحة تحتوى ب أو تكون ب نقطة نهاية لها . تكون الدالة د متصلة عند النقطة ب فى مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε
يوجد عدد حقيقى موجب δ
بحيث أن
لكل س فى مجال د

$$|س - ب| < \delta \quad \Leftarrow \quad |د(س) - د(ب)| < \varepsilon$$

بعض المؤلفين يقول فقط أن د يجب أن تكون معرفة على فترة مفتوحة ولايسمح للنقطة ب أن تكون نقطة نهاية لهذه الفترة . إذا فعلنا ذلك فان هذا التعريف سيتعارض مع تعريفنا عند النقطة صفر بالنسبة للدالة د ، وعند النقطتين صفر ، ١ بالنسبة للدالة ر ، وكذلك عند كل نقطة من نقط مجال ع .

سننهى هذا الباب بإعادة تعريفنا للاتصال عند نقطة فى مجال الدالة .

تكون الدالة د متصلة عند نقطة ب فى مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

$$|س - ب| < \delta \Rightarrow |د(س) - د(ب)| < \varepsilon$$



الباب السادس

تمهيد لحساب التفاضل والتكامل

سنعرف فى هذا الباب النتيجتين الأساسيتين فى دراسة النهايات والاتصال . فمن وجهة النظر التاريخية يعتمد حساب التفاضل والتكامل على النهايات . وسوف نعرف التفاضل والتكامل أولا بطريقة تقليدية ، بإستخدام مفهوم النهاية كأساس ، ثم سنعرفهما بطريقة جديدة مستخدمين الاتصال كأساس . ولكن قبل أن نشرع فى هذا ، سوف نبحث عملية الجمع . صمم نظام التمارين التالى لتأسيس مفهوم للمجموع يجعل تعريف التكامل أكثر سهولة .

٦ - ١ :

مجموع خمسة أعداد يمكن كتابته كالآتى :ـــ

$$\sum_{ن=١}^{٥} أ_{ن} = أ_{١} + أ_{٢} + أ_{٣} + أ_{٤} + أ_{٥}$$

أمثلـــة :

$$\sum_{ن=١}^{٥} ن = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ = ١٥$$

$$\sum_{ن=١}^{٥} ن^{٢} = ١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ = ٥٥$$

$$\sum_{ن=١}^{٥} \frac{١}{ن} = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} = \frac{١٣٧}{٦٠}$$

اكتب $\sum_{ن=١}^{٥} \frac{١}{ن^{٢}}$. لا تضيع وقتك فى إيجاد المجموع

$$\frac{١}{١} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{١٦} + \frac{١}{٢٥} .$$

٦ - ٢ : الرمز $\sum_{ن=١}^{٥} أ_{ن}$ يقرأ « مجموع $أ_{ن}$ بحيث تأخذ ن القيم من ١ إلى ٥ » . مجموع $ن^{٢}$ من ن = ١ إلى ن = ٤ هو

$$\sum_{ن=١}^{٤} ن^{٢} = ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} = ٣٠$$

ماهو مجموع $ن^{٢}$ من ن = ١ إلى ن = ٣ ؟

$$\sum_{ن=١}^{٣} ن^{٢} = ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} = ١٤$$

---

٦ – ٣ : كل مجموع فى هذه الدراسة يكون دليله الجمعى إما عدد طبيعى أو عدد صحيح غير سالب

سنرمز لدليل الجمع فى $\sum_{ن=١}^{٣} أ_{ن}$ بالرمز ن ، ونقول أن ن هو دليل المجموع .

فى $\sum_{ن=١}^{٦} أ_{ن}$ ، الدليل يأخذ القيم من ١ إلى .....

٦

---

٦ – ٤ : مجموع $\frac{ن + ١}{ن}$ من ن = ١ إلى ن = ٣ هو

$$\sum_{ن=١}^{٣} \frac{ن + ١}{ن} = \frac{١ + ١}{١} + \frac{١ + ٢}{٢} + \frac{١ + ٣}{٣} = ٢ + \frac{٣}{٢} + \frac{٤}{٣} = \frac{٢٩}{٦}$$

ماهو مجموع $\frac{ن^{٢} + ١}{ن}$ من ن = ١ إلى ن = ٣ ؟

$$\sum_{ن=١}^{٣} \frac{ن^{٢} + ١}{ن} = \frac{١^{٢} + ١}{١} + \frac{٢^{٢} + ١}{٢} + \frac{٣^{٢} + ١}{٣} = ٢ + \frac{٥}{٢} + \frac{١٠}{٣} = \frac{٤٧}{٦}$$

---

٦ – ٥ : الرمز $\sum_{ن=١}^{\infty} أ_{ن}$ يقرأ « مجموع $أ_{ن}$ من ١ إلى ∞ » .

ويرمز إلى مجموع $\frac{١}{٢^{ن}}$ من ١ إلى ∞ كالتالى :

$$\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٢^{ن}} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \cdots + \frac{١}{٢^{ن}} + \cdots = ١$$

يلاحظ أن هذا هو نفس المجموع الذى أخذ مجهوداً كبيراً من أشيلس فى الباب الثانى. هذا المجموع يسمى مجموع المتتابعة ($\frac{١}{٢^{ن}}$) .

ماهو مجموع المتتابعة ($\frac{١}{٢^{ن-١}}$) ؟

$$\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٢^{ن-١}} = \frac{١}{١} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \cdots + \frac{١}{٢^{ن-١}} + \cdots = ٢$$

نحن نعرف أن هذا المجموع يساوى ٢ لأنه يساوى

$$١ + \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٢^{ن}} = ٢$$

٦ – ٦ : يمكن إستخدام أى حرف كدليل للمجموع .

مثـال :

$$\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٣} = \sum_{ل=١}^{ن} ل^{٣} = \sum_{م=١}^{ن} م^{٣} .$$

كل هذه المجاميع تمثل $١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ... + ن^{٣}$.

عبر رمزيا عن المجموع

$$٢^{١} + ٢^{٢} + ٢^{٣} + ٢^{٤} + ... + ٢^{ن}$$

بأدلة متعددة .

$$\sum_{ك=١}^{ن} ٢^{ك} = \sum_{ل=١}^{ن} ٢^{ل} = \sum_{م=١}^{ن} ٢^{م} .$$

أو بأى حرف آخر يستخدم كدليل .

٦ – ٧ : قاعدة أساسية للجمع هى :

$$\sum_{ك=١}^{ن} (أ_{ك} + ب_{ك}) = \sum_{ك=١}^{ن} أ_{ك} + \sum_{ك=١}^{ن} ب_{ك}$$

مثـال : $\sum_{ك=١}^{٤} (٢^{ك} + ك) = (٢ + ١) + (٤ + ٢) + (٨ + ٣) + (١٦ + ٤) = ٤٠$

$$= \sum_{ك=١}^{٤} ٢^{ك} + \sum_{ك=١}^{٤} ك$$

$$= (٢ + ٤ + ٨ + ١٦) + (١ + ٢ + ٣ + ٤) = ٤٠$$

ماقيمة $\sum_{ل=١}^{٣} (ل^{٢} + ٢^{ل})$ ؟

$$\sum_{ل=١}^{٣} ل^{٢} + \sum_{ل=١}^{٣} ٢^{ل} = (١ + ٤ + ٩) + (٢ + ٤ + ٨) = ٢٨$$

٦ – ٨ : مجموع غير عادى الشكل هو :

$$\sum_{ك=١}^{٥} ٢ = ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ = ١٠$$

ما قيمة $\sum_{ن=١}^{٤} (٣ + ن)$ ؟

$$\sum_{ن=١}^{٤} ٣ + \sum_{ن=١}^{٤} ن = (٣ + ٣ + ٣ + ٣) + (١ + ٢ + ٣ + ٤) = ٢٢$$

يمكن أيضا إيجاد هذا المجموع مباشرة كالآتى :

$$٤ + ٥ + ٦ + ٧ = ٢٢$$

٦ - ٩ : خاصية أخرى للمجموع :

$$\sum_{م=١}^{ن} حـ أ_م = حـ \sum_{م=١}^{ن} أ_م$$

مثـــال :

$$\sum_{ك=١}^{٣} ٥ ك = ٥ \sum_{ك=١}^{٣} ك = ٥ (١ + ٢ + ٣) = ٣٠$$

أوجد قيمة $\sum_{م=١}^{٤} ٣ م^٢$

$$\sum_{م=١}^{٤} ٣ م^٢ = ٣ \sum_{م=١}^{٤} م^٢ = ٣ (١ + ٤ + ٩ + ١٦) = ٩٠$$

٦ - ١٠ : فيما يلى قائمة من المجاميع . غطى الطرف الأيسر من كل معادلة وتحقق مما إذا كان يمكنك الحصول على الإجابة الصحيحة :

أ : $\sum_{ن=٢}^{٦} \frac{١}{٢ + ٤ ن} = \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٤} + \frac{١}{١٨} + \frac{١}{٢٢} + \frac{١}{٢٦}$

ب : $\sum_{ن=٠}^{٤} \frac{١}{١٠ + ٤ ن} = \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٤} + \frac{١}{١٨} + \frac{١}{٢٢} + \frac{١}{٢٦}$

حـ : $\sum_{ل=٠}^{٥} \frac{١}{ل + ١} = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٦}$

د : $\sum_{ل=١}^{٦} \frac{١}{ل} = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٦}$

هـ : $\sum_{ل=٠}^{٥} \frac{١}{٦ - ل} = \frac{١}{٦} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} + ١$

لاحظ أن حـ ، د ، هـ تمثل جميعها نفس المتسلسلة .

و : $\sum_{ك=١}^{٣} ك! = ١ + (١ \times ٢) + (١ \times ٢ \times ٣) = ٩$

ز : $\sum\limits_{م=٠}^{٥} \frac{م}{٣ + م} = ٠ + \frac{١}{٤} + \frac{٢}{٥} + \frac{٣}{٦} + \frac{٤}{٧} + \frac{٥}{٨}$

ح : $\sum\limits_{م=٣}^{٩} \frac{م + ١}{م - ١} = \frac{٤}{٢} + \frac{٥}{٣} + \frac{٦}{٤} + \frac{٧}{٥} + \frac{٨}{٦} + \frac{٩}{٧} + \frac{١٠}{٨}$

٦ - ١١ : المتتابعة (٠,٣ ، ٠,٠٣ ، ٠,٠٠٣ ، ٠,٠٠٠٣ ، ... ، $\frac{٣}{١٠^ن}$ ، ...) تؤول إلى الصفر ، ومن ثم فهى لا تؤول إلى $\frac{١}{٣}$.

ويمكن أن نكون منها متتابعة ، تسمى متتابعة المجاميع الجزئية ، التى تقترب من $\frac{١}{٣}$ وذلك بوضع :

$ح_١ = ٠,٣ = ٠,٣$

$ح_٢ = ٠,٣ + ٠,٠٣ = ٠,٣٣$

$ح_٣ = ٠,٣ + ٠,٠٣ + ٠,٠٠٣ = ٠,٣٣٣$

- - - - - - - - - - -

$ح_ن = ٠,٣ + ٠,٠٣ + ... + \frac{٣}{١٠^ن} = ٠,٣٣٣٠٠٠٣$

وبالتالى فإن متتابعة المجاميع الجزئية هى :

($ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... ، $ح_ن$ ، ...)

وكل حد $ح_ن$ من حدودها مجموع جزئى ، ونهاية هذه المتتابعة تساوى $\frac{١}{٣}$ ، أى أن

$\lim\limits_{ن \to \infty} ح_ن = \lim\limits_{ن \to \infty} \sum\limits_{ك=١}^{ن} \frac{٣}{١٠^ك} = \frac{١}{٣}$

كون متتابعة المجاميع الجزئية للمتتابعة

(٠,٢ ، ٠,٠٢ ، ٠,٠٠٢ ، .... ، $\frac{٢}{١٠^ن}$ ، ...)

(٠,٢ ، ٠,٢٢ ، ٠,٢٢٢ ، ... ، $\sum\limits_{ك=١}^{ن} \frac{٢}{١٠^ك}$ ، ...)

تعريف ٦ - ١ :

إذا أعطينا المتتابعة ($أ_ن$) = { (ن ، س) س = $أ_ن$ ، حيث ن عدد طبيعى } ، فإنه يمكننا تكوين متتابعة أخرى بالطريقة الآتية :

$ح_١ = أ_١$

$ح_٢ = أ_١ + أ_٢$

$ح_٣ = أ_١ + أ_٢ + أ_٣$

$ح_٤ = أ_١ + أ_٢ + أ_٣ + أ_٤$

....

$ح_ن = أ_١ + أ_٢ + أ_٣ + ... + أ_ن$

المتتابعة (حـ$_{ن}$) = { (ن ، ص) | ص = $\sum_{ك=1}^{ن}$ ك ، حيث ن عدد طبيعى }

تسمى متتابعة المجاميع الجزئيه للمتتابعة (أ$_{ن}$) .

مجموع المتتابعة (أ$_{ن}$) هو نهاية المتتابعة (حـ$_{ن}$) .

قبل الشروع فى تعريف التكامل سوف نعطى تعريفا للفترة المغلقة . تكون الفترة مغلقة إذا إحتوت نقطتى نهايتها . خلال هذه الدراسة كانت جميع الجوارات التى استخدمناها فترات مفتوحة .

إذا أضيفت نقطتى النهاية للفترة المفتوحة تصبح فترة مغلقة . الجوار ج$_{1}$ (٥) لا يتضمن نقطتى النهاية ٤ ، ٦ . لكل نقطة فى هذا الجوار يوجد عدد كبير من نقط الجوار التى تقع على كلا جانبى النقطة ، (مثل مراعى الماشية المفتوحة فى الغرب (أى ليس لها سياج)) .

فى الفترة المغلقة يمكننا تحديد نقطة فى هذه الفترة وأن نقول هذا هو الحد الأيمن لهذه الفترة (مثل مراعى الماشية المغلقة (أى لها سياج)) .

الجوار المغلق ج$^{م}_{1}$ (٥) يتضمن كل من النقطتين ٤ ، ٦ . فى الفترة المغلقة يمكننا التحدث عن النقطة الأكبر ، ولكن فى الفترة المفتوحة لا يمكن التحدث عن النقطة الأكبر .

مثـــال :

{س | ٠ $\geq$ س $\geq$ ٣ } عبارة عن الفترة المغلقة [٠ ، ٣] .

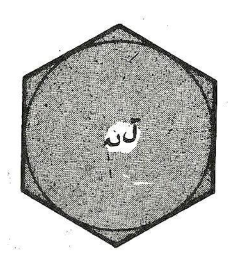
{س | ٠ $<$ س $<$ ٣ } عبارة عن الفترة المفتوحة] ٠ ، ٣ [.

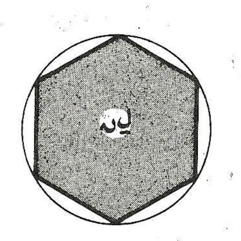
ماهى النقطة الأكبر فى الفترة المفتوحة ج$_{1}$ (٥) =] ٤ ، ٦ [؟

لا يوجد مثل هذه النقطة ، ولكن ٦ هى النقطة الأكبر فى الفترة المغلقة [٤ ، ٦] = ج$^{م}_{1}$ (٥) .

٤ هى النقطة الأصغر فى الفترة المغلقة [٤ ، ٦] ، ولكن لا يوجد نقطة أصغر فى الفترة المفتوحة] ٤ ، ٦ [.

ومفهوم التكامل تطبيق على مفهوم النهاية التى كانت مفيدة إلى حد كبير فى حساب التفاضل والتكامل . عندما تجرى عملية التكامل ، فإنه يجمع العديد من الأجزاء الصغيرة لتعطى كلا له معنى أفضل .





شكل ٦ – ١

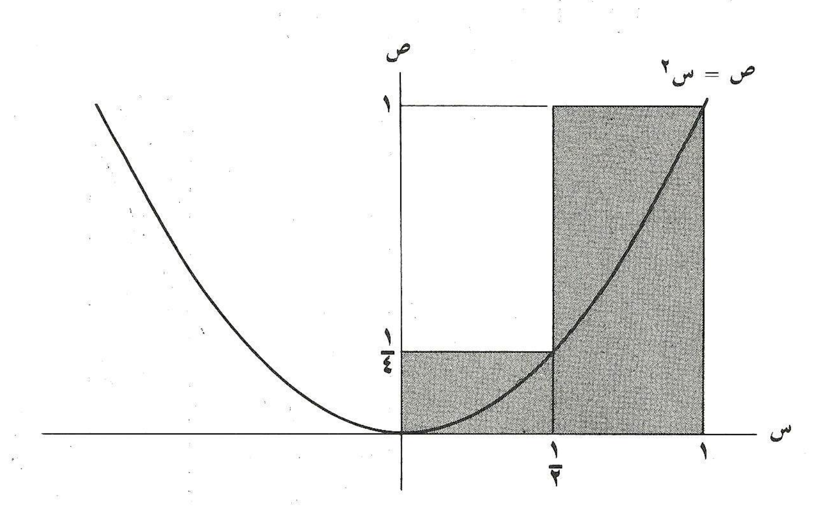
لقد إبتدع أرشميدس (٢٨٧ - ٢١٢ ق . م) طريقة التقريب المتتالى لحساب مساحة الدائرة . فقد رسم مضلعا منتظما ، سوف نرمز له بالرمز لِ ن ، داخل الدائرة (أنظر شكل ٦ - ١) ، ثم رسم مضلعا منتظما لَ ن له نفس عدد الاضلاع خارج الدائرة. مساحة المضلع لِ ن تكون أقل من مساحة الدائرة التى تكون بدورها أقل من مساحة المضلع الخارجى لَ ن .

وحيث أن أرشميدس كان يعرف طريقة ايجاد مساحة كل من لِ ن ، لَ ن لأى عدد ن من الأضلاع ، فقد كان بإستطاعته حساب مساحة الدائرة لأى درجة يريدها من الدقه وذلك بتخصيص الوقت اللازم لحسابها .

وسوف لا نقوم هنا بحساب مساحة الدائرة ، ولكننا سوف نحاول معالجة مسألة مشابهة وهى ايجاد المساحة تحت منحنى .

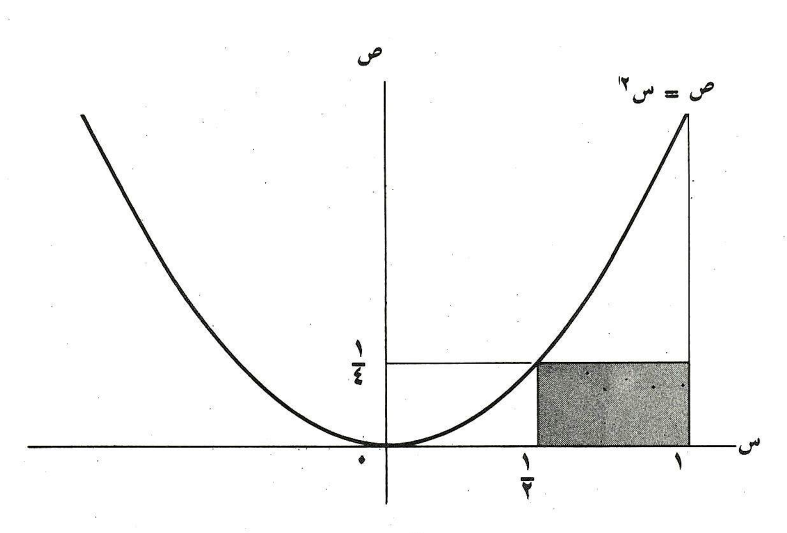
إفرض أن لدينا منحنى المعادلة ص = س^{٢} ،
ماهى المساحة تحت هذا المنحنى من صفر إلى واحد ؟
وحتى نكون أكثر دقة ، ماهى المساحة المحدودة بمحور السينات والخطين المستقيمين س = ٠ ، س = ١، والمنحنى ص = س^{٢} ؟

المساحة من صفر إلى ١ (ح$^{١}_{٠}$) تكون فى الحقيقة أقل من مساحة فئة المستطيلات التى نحصل عليها بتقسيم الفترة المغلقة [٠ ، ١] إلى الفترتين الجزئيتين [٠ ، $\frac{١}{٢}$] و [$\frac{١}{٢}$ ، ١] وانشاء مستطيلان مستخدمين الارتفاعات عند نقط نهايتيهما اليسرى : $\frac{١}{٤}$ ، ١ (شكل ٦ - ٢) .



شكل ٦ - ٢

والمساحة ح١ تكون أكبر من مساحة المستطيلان المكونان من الفترتين الجزئيتين [٠ ، $\frac{١}{٢}$] و [$\frac{١}{٢}$ ، ١] بإرتفاعين صفر ، $\frac{١}{٤}$ عند نقط نهايتيهما اليمنى (شكل ٦ ـ ٣) .

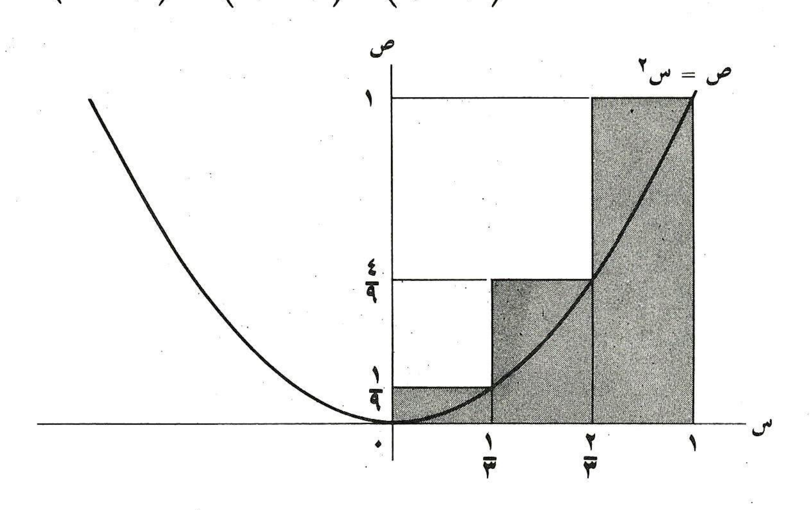


شكل ٦ ـ ٣

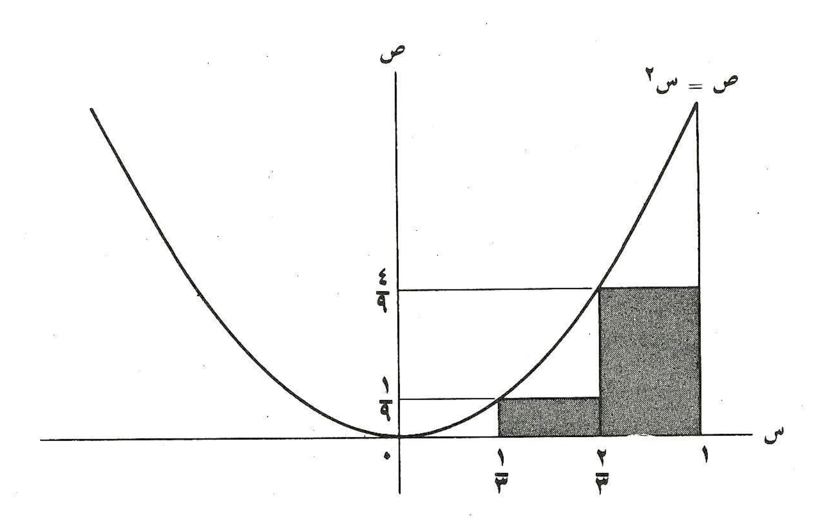
وبتقسيم الفترة [٠ ، ١] إلى ثلاث فترات جزئية متساويه هى [٠ ، $\frac{١}{٣}$] ، [$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$] ، [$\frac{٢}{٣}$ ، ١] ، نحصل على (شكلى ٦ ـ ٤ ، ٦ ـ ٥) :

$$\text{صفر} + \left(\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٩} \right) + \left(\frac{١}{٣} \times \frac{٤}{٩} \right) = \frac{٥}{٢٧} < \text{ح}_١ < \frac{١٤}{٢٧} =$$

$$\left(\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٩} \right) + \left(\frac{١}{٣} \times \frac{٤}{٩} \right) + \left(\frac{١}{٣} \times ١ \right)$$



شكل ٦ ـ ٤

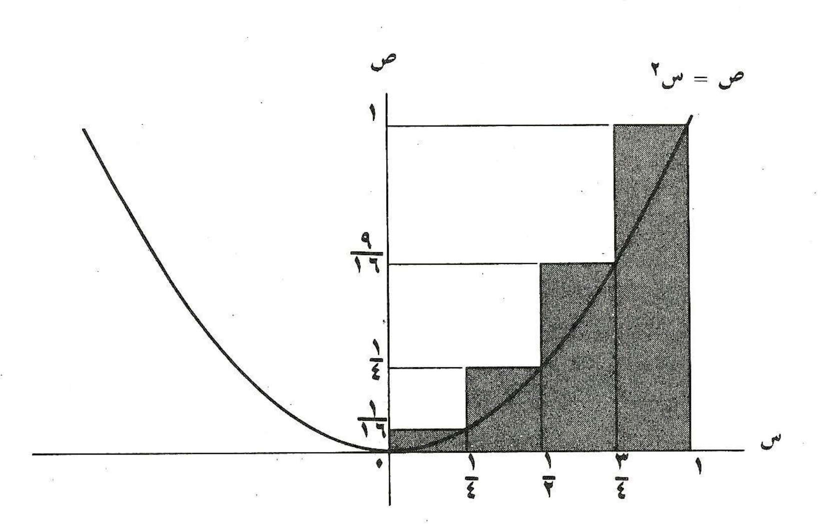


شكل ٦ – ٥

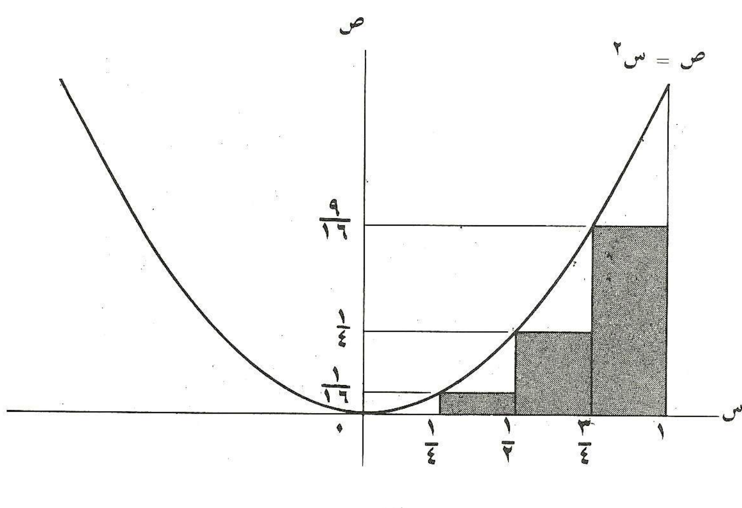
ولأربع فترات متساوية نحصل على (شكلى ٦ – ٦ ، ٦ – ٧) :

$$\text{صفر} + \left(\frac{١}{٤} \times \frac{١}{١٦}\right) + \left(\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٤} \times \frac{٩}{١٦}\right) = \frac{٧}{٣٢} \leq \text{ح}^{١} \leq \frac{١٥}{٣٢} =$$

$$\left(\frac{١}{٤} \times \frac{١}{١٦}\right) + \left(\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٤} \times \frac{٩}{١٦}\right) + \left(\frac{١}{٤} \times ١\right) .$$

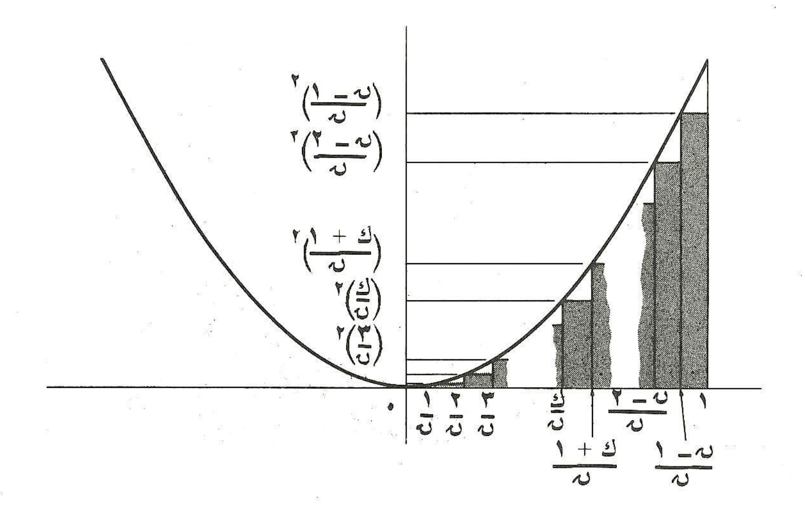


شكل ٦ – ٦

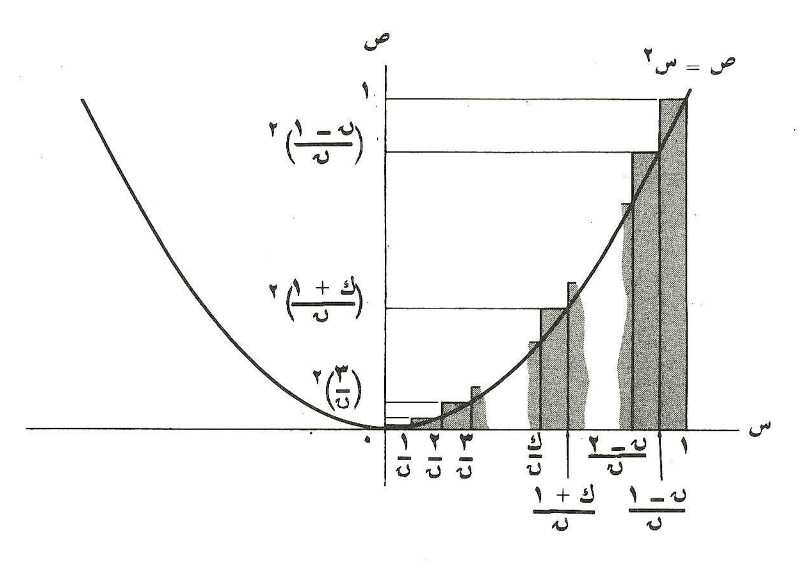


شكل ٦ – ٧

وفى الحقيقة ، فمهما جعلنا قواعد مستطيلاتنا صغيرة جدا ، فإن ح[١] تكون أقل من أو تساوى مجموع مساحات المستطيلات المنشأة باستخدام الأضلاع اليسرى كإرتفاعات وتكون أكبر من أو تساوى مجموع مساحات المستطيلات المنشأة بإستخدام الأضلاع اليمنى كإرتفاعات .



شكل ٦ – ٨



شكل ٦ – ٩

إفرض أن $\underline{م}_{ن}$ المساحة التى حصلنا عليها بتقسيم الفترة [٠ ، ١] إلى ن من الفترات الجزئية المتساوية وجمع مساحات المستطيلات المنشأة بحيث تكون الفترات الجزئية قواعدها ، وارتفاعاتها تساوى قيم الدالة عند الأطراف اليسرى للفترات الجزئية . إفرض أن $\overline{م}_{ن}$ المساحة التى حصلنا عليها باستخدام نقط الأطراف اليمنى لحساب الارتفاعات (أنظر شكل ٦ – ٩) . إذن

$$\underline{م}_{ن} \le ح_{١} \le \overline{م}_{ن}$$

يمكننا تكوين متتابعتان

$$(\overline{م}_{ن}) = (١ ، \frac{٥}{٨} ، \frac{١٤}{٢٧} ، \frac{١٥}{٣٢} ، \dots ، \overline{م}_{ن} ، \dots)$$

$$(\underline{م}_{ن}) = (٠ ، \frac{١}{٨} ، \frac{٥}{٢٧} ، \frac{٧}{٣٢} ، \dots ، \underline{م}_{ن} ، \dots)$$

لايجاد نهايه هاتين المتتابعتين سوف نبحث سلوك الحد العام لكل منهما

$$\underline{م}_{ن} = ٠ + \frac{١}{ن}\left(\frac{١}{ن}\right)^{٢} + \frac{١}{ن}\left(\frac{١}{ن}\right)^{٢} + \cdots + \frac{١}{ن}\left(\frac{ن - ١}{ن}\right)^{٢}$$

$$= \frac{١}{ن}\left(\frac{٠ + ١}{ن^{٢}} + \frac{٤}{ن^{٢}} + \cdots + \frac{(ن - ١)^{٢}}{ن^{٢}} \right)$$

$$= \frac{١}{ن} \cdot \frac{١}{ن^{٢}} \left(٠ + ١ + ٤ + \cdots + (ن - ١)^{٢} \right)$$

ولكـــن

$$\text{١}^{\text{٢}} + \text{٢}^{\text{٢}} + \cdots + \text{ك}^{\text{٢}} = \frac{\text{ك}}{\text{٦}} (\text{ك} + \text{١}) (\text{٢ ك} + \text{١})$$

لأى عدد طبيعى ك ، ومن ثم

$$\underline{\text{م}}_{\text{ن}} = \frac{\text{١}}{\text{ن}^{\text{٣}}} \frac{\text{ن}}{\text{٦}} (\text{ن} - \text{١}) (\text{٢ ن} - \text{١}) = \frac{(\text{ن} - \text{١}) (\text{٢ ن} - \text{١})}{\text{٦ ن}^{\text{٢}}}$$

بالمثل

$$\overline{\text{م}}_{\text{ن}} = \frac{\text{١}}{\text{ن}} \left(\frac{\text{١}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{ن}} \left(\frac{\text{٢}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}} + \cdots + \frac{\text{١}}{\text{ن}} \left(\frac{\text{ن} - \text{١}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{ن}} \left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{ن}} \left(\frac{\text{١}}{\text{ن}^{\text{٢}}} + \frac{\text{٤}}{\text{ن}^{\text{٢}}} + \cdots + \left(\frac{\text{ن} - \text{١}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}} + \frac{\text{ن}^{\text{٢}}}{\text{ن}^{\text{٢}}} \right)$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{ن}^{\text{٣}}} \frac{\text{ن}}{\text{٦}} (\text{ن} + \text{١}) (\text{٢ ن} + \text{١}) = \frac{(\text{ن} + \text{١}) (\text{٢ ن} + \text{١})}{\text{٦ ن}^{\text{٢}}}$$

نحن الآن فى وضع يسمح لنا بحساب المساحة $\text{ح}^{\text{١}}$ تحت المنحنى ص = $\text{س}^{\text{٢}}$ من صفر إلى ١ .

$$\lim_{\text{ن} \to \infty} \overline{\text{م}}_{\text{ن}} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{(\text{ن} + \text{١}) (\text{٢ ن} + \text{١})}{\text{٦ ن}^{\text{٢}}} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{٢ ن}^{\text{٢}} + \text{٣ ن} + \text{١}}{\text{٦ ن}^{\text{٢}}}$$

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(\frac{\text{١}}{\text{٣}} + \frac{\text{١}}{\text{٢ ن}} + \frac{\text{١}}{\text{٦ ن}^{\text{٢}}} \right)$$

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{١}}{\text{٣}} + \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{١}}{\text{٢ ن}} + \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{١}}{\text{٦ ن}^{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} + \text{٠} + \text{٠}$$

$$\therefore \lim_{\text{ن} \to \infty} \overline{\text{م}}_{\text{ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} .$$

وبالتالى فإن المساحة $\text{ح}^{\text{١}} \geq \frac{\text{١}}{\text{٣}}$.

سوف نحسب الآن نهاية متتابعة المجموع الأدنى

$$\left(\text{٠} \text{ ، } \frac{\text{١}}{\text{٨}} \text{ ، } \frac{\text{٥}}{\text{٢٧}} \text{ ، } \cdots \text{ ، } \frac{(\text{ن} - \text{١}) (\text{٢ ن} - \text{١})}{\text{٦ ن}^{\text{٢}}} \text{ ، } \cdots \right)$$

الآن ،

$$\lim_{\text{ن} \to \infty} \text{م}_{\text{ن}} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{(\text{ن} - \text{١}) (\text{٢ ن} - \text{١})}{\text{٦ ن}^{\text{٢}}}$$

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{٢ ن}^{\text{٢}} - \text{٣ ن} + \text{١}}{\text{٦ ن}^{\text{٢}}}$$

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{١}}{\text{٣}} - \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{١}}{\text{٢ ن}} + \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{١}}{\text{٦ ن}^{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$$

والآن قد حصلنا على

$$\frac{١}{٣} \geq ح_{ب}^{١} \geq \frac{١}{٣}$$

وبالتالى فإن $ح_{ب}^{١}$ تساوى $\frac{١}{٣}$

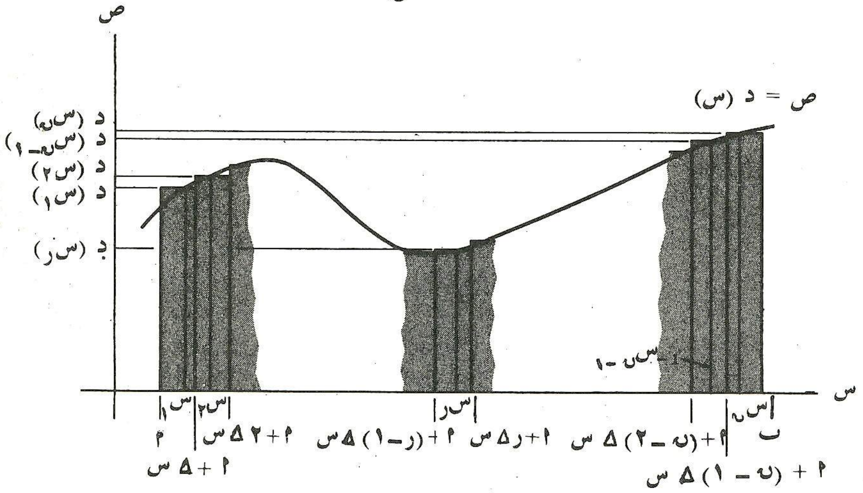
فى هذا المثال ، المتتابعتان ($م_{ن}$) و ($\bar{م}_{ن}$) تؤولان إلى نفس النهاية التى تساوى المساحة تحت المنحنى

وفى الحقيقة ، إذا كونا متتابعة ($م_{ن}$) لمجاميع مساحات كل المستطيلات المنشأة على فترات جزئية متساوية بإختيار أى نقطة $س_{ر}$ داخل كل فترة جزئية لتحديد الارتفاع د ($س_{ر}$) للمستطيل الذى قاعدته هذه الفترة الجزئية ، فإن نهاية هذه المتتابعة سوف تكون المساحة تحت المنحنى .

سوف نستخدم هذه الملاحظة فى صياغة « تعريفنا » للتكامل المحدد .

اعتبر دالة متصلة { (س ، ص) | ص = د(س) ، س $\in$ ح } معرفة على الفترة المغلقة [ا ، ب] . سنقسم الفترة [ا ، ب] الى ن من الفترات الجزئية المتساوية (شكل ٦ – ١٠) التى طول كل منها

$$\Delta س = \frac{ب - ا}{ن}$$



شكل ٦ – ١٠

ثم نكون المجموع

$$م_{ن} = د(س_{١}) \Delta س + د(س_{٢}) \Delta س + \cdot\cdot + د(س_{ن-١}) \Delta س + د(س_{ن}) \Delta س$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} د(س_{ر}) \Delta س$$

حيث $س_{ر}$ تقع فى الفترة الجزئية رقم ر ،

$$ا + (ر - ١) \Delta س \leq س_{ر} \leq ا + ر \Delta س$$

إننا بذلك نقرب المساحة تحت المنحنى بنفس الطريقة التى استخدمناها فى الأمثلة ، فيما عدا أننا نسمح الآن بأن تكون $س_ر$ أى قيمة س فى الفترة الجزئية رقم ر بدلا من نقطة الطرف اليمنى أو نقطة الطرف اليسرى .

المجاميع $م_ن$ ، ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، تكون المتتابعه ($م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ ، ....) . نهاية هذه المتتابعة ، $\underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} م_ن$ ، تفسر على أنها التكامل المحدد للدالة د من أ الى ب ويعبر عنه كتابة على الصورة

$$\int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس .$$

ولن نستهلك الوقت لتعريف التكامل المحدد بشكل أكثر اكتمالا ، ولكننا نعتقد أن هذا التعريف ، القائم على حساب المساحة تحت المنحنى ، سوف يساعد الطالب على فهم التعريفات المختلفة الموجودة فى كتب حساب التفاضل والتكامل .

عندما نتعامل مع الدوال الموجبة والمتصلة على مجال الاعداد الحقيقية والتى مداها مجموعة الأعداد الحقيقية ، فإنه يمكن تفسير التكامل المحدد على أنه المساحة تحت المنحنى ، ويمكننا كتابة :

$$ح_{أ}^{ب} = \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} م_ن = \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} \sum_{ر=١}^{ن} د(س_ر) \; \Delta س = \int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس$$

حيث

$$\Delta س = \frac{ب - أ}{ن} ،$$

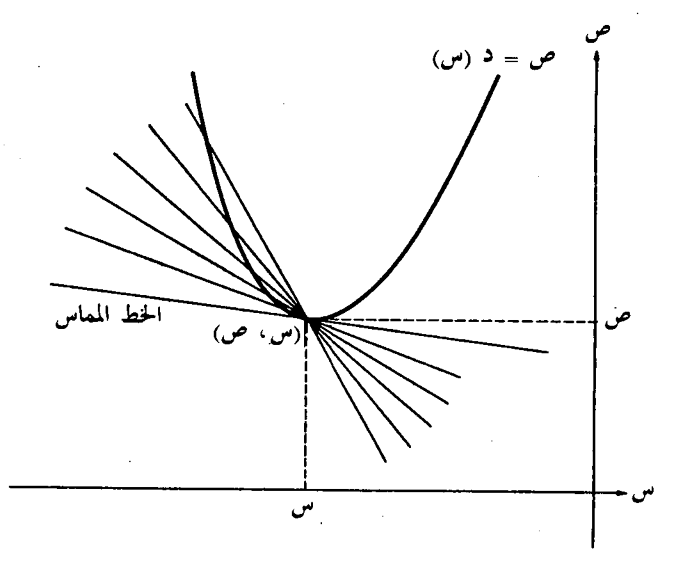
$$أ + (ر - ١) \; \Delta س \leq س_ر \leq أ + ر \; \Delta س$$

(أنظر شكل ٦ - ١٠)

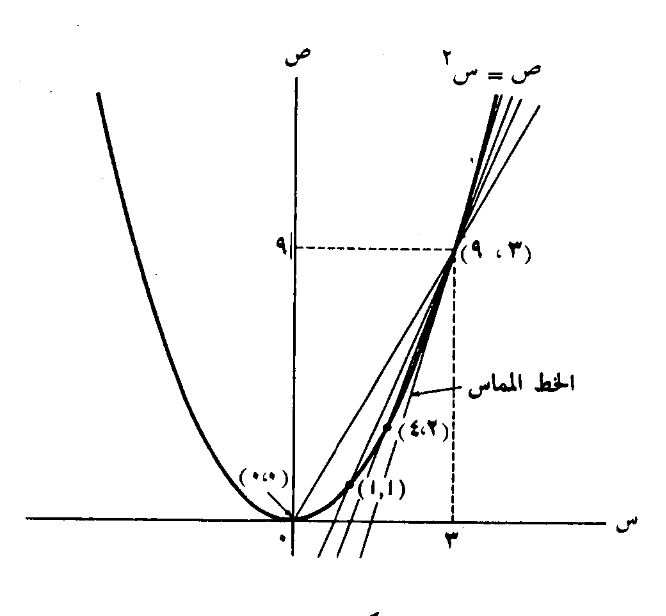
تطبيق آخر لمفهوم النهاية يتمثل فى إيجاد ميل الخط المماس لمنحنى عند النقطة (س ، د (س)) .

إذا رسمنا الدالة المتصلة د ، فإننا نحصل على منحنى أملس . وسوف نطلق على خط ما « مماس للمنحنى » إذا كان له نفس ميل المنحنى عند نقطة التماس . فى شكل ٦ - ١١ رسمنا خط مماس إلى جانب عدة خطوط قاطعة . فى هذا الشكل الخطوط القاطعة هى الخطوط التى تقطع المنحنى فى نقطتين . الخط المماس يمس المنحنى فى نقطة واحدة فقط وميله هو نفس ميل المنحنى عند هذه النقطة ومع أنه من الواضح أى هذه الخطوط هو الخط المماس ، ولكن هناك صعوبة بسيطة فى تحديد ميله بالضبط .

إفرض أننا نرغب فى معرفة ميل الخط المماس لمنحنى الدالة د = { (س ، ص) ص = $س^٢$ } عند النقطة (٣ ، ٩) .



شكل ٦ ـ ١١



شكل ٦ – ١٢

فى شكل ٦ – ١٢ قمنا برسم الخط المماس وثلاثة خطوط قاطعة : الخط القاطع الأول يمر بالنقطة (٠ ، ٠) وكذلك بالنقطة (٣ ، ٩) ، وبالتالى فإن ميل هذا الخط هو $\frac{٩ - ٠}{٣ - ٠}$ ، أى ٣ .

الخط القاطع الثانى يمر خلال النقطتين (١ ، ١) و (٣ ، ٩) وميله م = $\frac{١ - ٩}{١ - ٣}$ = ٤

الخط القاطع الثالث يمر خلال النقطتين (٢ ، ٤) و (٣ ، ٩) وميله م = $\frac{٤ - ٩}{٢ - ٣}$ = ٥

لقد أوجدنا ميل الخط القاطع بأخذ الفرق ص — ب بين العنصرين الثانيين للأزواج المرتبة وقسمته على الفرق س — ﺃ بين العنصرين الأوليين للأزواج المرتبة ، بذلك نستطيع أن نكون معادلة لميل الخط المار بالنقطتين (س ، ص) و (ﺃ ، ب) :

$$\text{الميل} = م = \frac{ص - ب}{س - ﺃ}$$

ومع ذلك ، فإن هذه المعادلة لا يمكن استخدامها للخط المماس . فإذا قبلنا حقيقة أن ميل الخط القاطع المار بالنقطة (١ ، ١) يكون أقرب لميل الخط المماس عن ميل الخط القاطع المار بالنقطه (٠ ، ٠) ، وأن ميل الخط القاطع المار بالنقطة (٢ ، ٤) يكون أكثر قربا ، فإننا نستطيع أن نفترض أن نهاية ميل الخطوط القاطعة عندما س ← ٣ يكون ميل الخط المماس .

إذا سلمنا بهذا ، فإن ميل الخط المماس عند النقطة (٣ ، ٩) يكون

$$م = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{د(س) - د(٣)}{س - ٣}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٣^٢}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} س + ٣ = ٦ .$$

٦ - ١٢ : باتباع نفس الطريقة ، أوجد ميل المنحنى { (س ، ص) | ص = $س^٢$ } عند النقطة (٤ ، ١٦) .

---

٨ ، حيث أن $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} \frac{س^٢ - ٤^٢}{س - ٤} = \underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} س + ٤ = ٨$

---

٦ - ١٣ : ماهو ميل المنحنى { (س ، ص) ص = $س^٢$ } عند النقطة (١ ، ١) ؟

---

٢ ، حيث أن $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س^٢ - ١^٢}{س - ١} = \underset{س \leftarrow ١}{نهـا} س + ١ = ٢$.

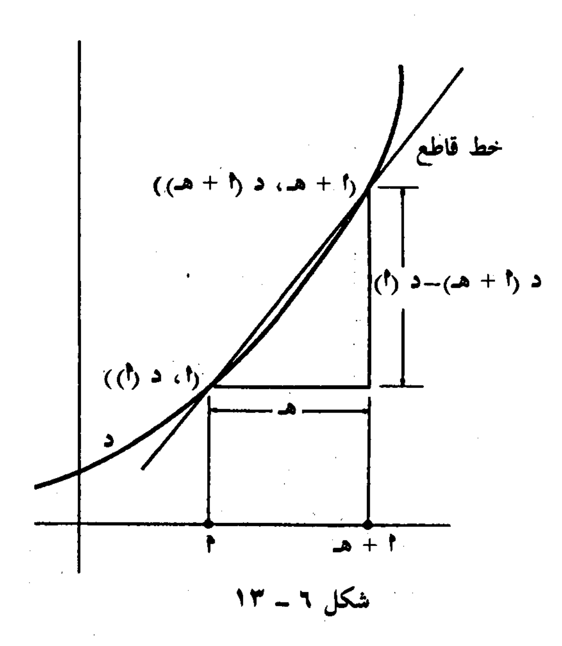
---

٦ - ١٤ : إذا إفترضنا أن نفس الأسلوب يمكن تطبيقه على دوال أخرى ، فما هو ميل الخط المماس للمنحنى ص = $س^٢$ + س عند النقطه (٣ ، ١٢) ؟

---

٧ ، حيث أن $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{(س^٢ + س) - ١٢}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{(س - ٣)(س + ٤)}{س - ٣} = ٧$.

هذا الاتجاه البسيط للتعليل كان مفهوما صعبا استنفذ جهدا فائقا للوصول به إلى صورته البسيطة الحالية .



شكل ٦ ـ ١٣

فميل الخط المماس لمنحنى دالة هو مشتقة هذه الدالة محسوبة عند نقطة التماس .

سوف نعطى الآن التعريف المألوف للمشتقة . فى شكل ٦ – ١٣ ، وضعنا هـ = س ــ ا ، د (ا + هـ) ــ د (ا) بدلا من د (س) ــ د (ا) ، وبالتالى فإن ميل الخط المماس عند النقطة (ا ، د (ا)) يأخذ الصورة

$$م = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{د (ا + هـ) ــ د (ا)}{هـ}$$

تعريف ٦ – ٢ : يقال للدالة د المعرفة على الفترة المغلقة [ا ، ب] أنها قابلة للتفاضل عند س ∈ [ا ، ب] إذا وفقط إذا كانت النهاية $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{د (س + هـ) ــ د (س)}{هـ}$ موجودة .

هذه النهاية تسمى « مشتقة الدالة د عند س » ويرمز لها بالرمز دَ (س) .

٦ – ١٥ : إفرض أن د (س) = س^{٣} + ١ . أوجد مشتقة الدالة د عند ٢ .

دَ (٢) = ١٢ ،

$$لأن دَ (٢) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{د (٢ + هـ) ــ د (٢)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{(٨ + ١٢ هـ + ٦ هـ^{٢} + هـ^{٣} + ١) ــ (٨ + ١)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{١٢ هـ + ٦ هـ^{٢} + هـ^{٣}}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـــا} (١٢ + ٦ هـ + هـ^{٢}) = ١٢$$

٦ – ١٦ : إفرض أن د = { (س ، ص) ص = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ } . أوجد دَ (٥) .

دَ (٥) = – $\frac{١}{٢٥}$ ، لأن

$$دَ (٥) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د (٥ + هـ) – د (٥)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to} \frac{\frac{١}{٥ + هـ} – \frac{١}{٥}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥ – (٥ + هـ)}{٥ هـ (٥ + هـ)}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{– ١}{٢٥ + ٥ هـ} = – \frac{١}{٢٥} .$$

٦ – ١٧ : ماهو ميل الخط المماس للمنحنى ف (س) = $س^٢$ + س + ١ عند النقطة (– ٣ ، ٧) ؟

– ٥ ميل الخط المماس عند (– ٣ ، ٧) هو ببساطة فَ (– ٣) .

$$فَ (– ٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ف (– ٣ + هـ) – ف (– ٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٧ – ٥ هـ + هـ^٢) – ٧}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} (– ٥ + هـ) = – ٥ .$$

٦ – ١٨ : أوجد مشتقة د = { (س ، ص) | ص = $س^٢$ } عند نقطة س فى مجالها .

دَ (س) = ٢ س ،

لأن

$$دَ (س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د (س + هـ) – د (س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^٢ – س^٢}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢ س هـ + هـ^٢}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} (٢ س + هـ) = ٢ س$$

لاحظ أننا يمكن أن نستخدم المعادلة دَ(س) = ٢ س لتعريف دالة جديدة

دَ = { (س ، ص) ص = ٢ س } ، والتى سوف نطلق عليها مشتقة الدالة د .

قيمة هذه الدالة عند أى نقطة ب فى مجالها تكون دَ(ب) ، أى مشتقة د عند ب .

٦ – ١٩ : إفرض أن ف = { (س ، ص) | ص = س^{٣} } . أوجد فَ (س) .

فَ (س) = ٣ س^{٢} ، لأن

$$\text{فَ (س)} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{٣} + ٣\ \text{س}^{٢}\ \text{هـ} + ٣\ \text{س هـ}^{٢} + \text{هـ}^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} (٣\ \text{س}^{٢} + ٣\ \text{س هـ} + \text{هـ}^{٢}) = ٣\ \text{س}^{٢}$$

٦ – ٢٠ : أفرض أن ى (س) = س^{٤} . أوجد ىَ (س) .

ىَ (س) = ٤ س^{٣} ، لأن

$$\text{ىَ (س)} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^{٤} - \text{س}^{٤}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{٤} + ٤\ \text{س}^{٣}\ \text{هـ} + ٦\ \text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{٢} + ٤\ \text{س هـ}^{٣} + \text{هـ}^{٤} - \text{س}^{٤}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} (٤\ \text{س}^{٣} + ٦\ \text{س}^{٢}\ \text{هـ} + ٤\ \text{س هـ}^{٢} + \text{هـ}^{٣})$$

$$= ٤\ \text{س}^{٣}$$

٦ – ٢١ : الأطر من ٦ – ٧ إلى ٦ – ٩ توضح أنه :

إذا كانت د = { (س ، س^{٢}) } ، فإن دَ = { (س ، ٢ س) } ،

وإذا كانت ف = { (س ، س^{٣}) } ، فإن فَ = { (س ، ٣ س^{٢}) } ،

وإذا كانت ى = { (س ، س^{٤}) } ، فإن ىَ = { (س ، ٤ س^{٣}) }

هذا يقودنا إلى أنه

إذا كانت د = { (س ، س^{ن}) } ، فإن دَ = { (س ، ن س$^{ن-١}$) }

برهن صحة هذا الفرض ، فى حالة ما إذا كان ن عددا صحيحا موجبا .

توجيه :

إذا كان ن عددا صحيحا موجبا ، فإنه باستخدام نظرية ذى الحدين ،

(س + هـ)^{ن} = س^{ن} + ن س$^{ن-١}$ هـ + $\frac{\text{ن(ن} - ١)}{٢}$ س$^{ن-٢}$ هـ^{٢} + (عدد محدود من الحدود التى تحتوى على قوى أكبر فى هـ) .

$$\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(\text{س}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}\,\text{هـ} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}\,\text{س}^{\text{ن}-2}\,\text{هـ}^2 + \cdots) - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} (\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}\,\text{س}^{\text{ن}-2}\,\text{هـ} + \cdots)$$

وحيث أن جميع كثيرات الحدود دوال متصلة ، فإنه يمكن التعويض عن هـ بالقيمة صفر مباشرة . وبالتالى ، فإن جميع الحدود تتلاشى فيما عدا الحد الأول . إذن

$$\text{د}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$$

أى أن ،

$$\text{د}' = \{ (\text{س} ، \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}) \}$$

وبالرغم من أن التفاضل والتكامل لهما تاريخين مختلفين ، كما أنه قد يبدو أن التعريفات التى أعطيناها غير مرتبطة ، فإنهما فى الحقيقة مرتبطين بالنظريه التالية :

إذا كانت د ، ف دالتين متصلتين على الفترة المغلقة [أ ، ء] بحيث أن د (س) = فَ (س) لكل س فى [أ ، ء] ، فإنه لأى نقطتين ب ، حـ فى الفترة [أ ، ء] ،

$$\int_{\text{ب}}^{\text{حـ}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \text{ف}(\text{حـ}) - \text{ف}(\text{ب}) .$$

هذه النظرية تربط بين التفاضل والتكامل بطريقة تسمح باعتبار كل منهما العملية العكسية للآخر . الدالة د تكون مشتقة الدالة ف عند أى نقطة فى الفترة ، وتكامل الدالة د من ب إلى حـ يساوى الفرق ف (حـ) — ف (ب) .

وفى ختام هذه الدراسة ، فإننا نرغب فى تعريف المشتقة والتكامل دون الإشارة إلى النهايات إطلاقا . وحيث أنه سيكون إشتقاق مستقل بذاته ، فإننا سنعيد صياغة بعض التعريفات .

وسنعرف أولا الإتصال عند نقطة ب فى مجال الدالة الذى يكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى الأعداد الحقيقية .

تعريف ١ :

تكون الدالة د متصلة عند نقطة ب فى مجالها إذا وفقط إذا كان

لكل عدد حقيقى موجب ε

يوجد عدد حقيقى موجب δ

بحيث أن

لكل س فى مجال د

إذا كان $|\text{س} - \text{ب}| < \delta$ ، فإن $|\text{د}(\text{س}) - \text{د}(\text{ب})| < \varepsilon$

تعريف ٢ :

يقال للدالة أنها **متصلة** إذا وفقط إذا كانت متصلة عند كل نقطة فى مجالها .

تكون الدالة **غير متصلة** عند نقطة فى مجالها إذا لم تكن متصلة عند هذه النقطة .

وتكون الدالة **غير متصلة** بالتأكيد عند النقط التى لاتنتمى لمجالها ، ولكننا سنقصر استخدام المصطلح « غير متصلة » لنقط المجال التى لاتكون عندها الدالة متصلة .

وسوف لانناقش الاتصال عند النقط التى لاتنتمى لمجال الدالة .

تعريف ٣ :

أفرض أن د ، ف دالتين معرفتين على الفترة المغلقة [٢ ، ء] . تكون الدالة ف **مماسة** للدالة د عند النقطة ب ∈ [٢ ، ء] إذا وفقط إذا كانت الدالة

ى = { (س ، ص) | ص = $\frac{\text{د (س) — ف (س)}}{\text{س — ب}}$ ، عندما س ≠ ب ، ص = صفر عندما س = ب }

متصلة عند النقطة ب .

تعريف ٤ :

أفرض أن د دالة متصلة على الفترة المغلقة [٢ ، ء] . تكون الدالة د **قابلة للتفاضل** عند نقطة ب ∈ [٢ ، ء] إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقى و بحيث تكون الدالة

ف = { (س ، ص) ص = د (ب) + و (س — ب) }

مماسة للدالة د عند النقطة ب . العدد الحقيقى ويسمى مشتقة الدالة د عند النقطة ب ويرمز لها بالرمز دَ (ب) .

تعريف ٥ :

أفرض أن د دالة متصلة على الفترة المغلقة [٢ ، ء] . الدالة ف تكون **مقابل مشتقة** للدالة د على الفترة [٢ ، ء] إذا وفقط إذا كانت ف قابلة للتفاضل عند جميع النقط س التى تنتمى لمجال د ، فَ (س) = د (س) .

تعريف ٦ :

أفرض أن د دالة متصلة على الفترة المغلقة [٢ ، ء] . إذا كانت ف أى مقابل مشتقة للدالة د ، فلأى نقطتين ب ، حـ فى الفترة [٢ ، ء] يسمى الفرق ف (حـ) — ف (ب) **تكامل** الدالة د بين ب ، حـ ، ويعبر عنه رمزيا كالتالى :

$$\int_{\text{ب}}^{\text{حـ}} \text{د (س) ء س}$$

طريقة أخرى لتعريف حساب التفاضل والتكامل بإستخدام الاتصال كأساس ، تتمثل فى تعريف النهاية من الاتصال ومن ثم تعريف المشتقة والتكامل بالطريقة التقليدية . وسنقوم الآن بتعريف نقطة التراكم ونهاية الدالة بإستخدام تعريفنا للإتصال عند نقطة كأساس .

تعريف ٧ :

تكون النقطة ب **نقطة تراكم** لمجال الدالة د إذا وفقط إذا كان كل جوار مثقوب للنقطة ب يحتوى على الأقل نقطة واحدة من نقاط مجال د .

تعريف ٨ :

يقال للعدد الحقيقى ل أنه نهاية د (س) عندما تقترب س من نقطة تراكم ب لمجال الدالة د إذا وفقط إذا كانت الدالة

ف = { (س ، ص) ، ص = د (س) عندما س $\neq$ ب ، ص = ل عندما س = ب }

متصلة عند النقطة ب .

التمـــارين

أوجد كل من النهايات التالية :

١ - $\underset{\text{ص} \to ٤}{\text{نهـا}} (٤\,\text{ص} - ٣)$ ، ٢ - $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٥)$

٣ - $\underset{\text{ل} \to ٣}{\text{نهـا}} (٢\,\text{ل}^{٢} - \text{ل} - ١٥)$ ، ٤ - $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} (٥\,\text{س}^{٣} + ٣\,\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س} + ٢)$

٥ - $\underset{\text{و} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{و}}{\text{و}^{٢} + ٤}$ ، ٦ - $\underset{\text{ص} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ص} + ٣}{\text{ص} + ٢}$

٧ - $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥}{\text{س} - ١}$ ، ٨ - $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\,\text{س} + ٥\,\text{س}^{٢}}{\text{س}}$

٩ - $\underset{\text{ك} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ك}^{٣} + ٤\,\text{ك}^{٢}}{\text{ك}^{٢} + ٥\,\text{ك}}$ ،

١٠ - $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} + ٨\,\text{س}^{٤} + ١٢\,\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٣\,\text{س}}{٥\,\text{س}}$ ،

١١ - $\underset{\text{هـ} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{٢} - ٤}{\text{هـ} - ٢}$ ، ١٢ - $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ١}$

١٣ - $\underset{\text{س} \to -٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢٠}{\text{س} + ٤}$ ، ١٤ - $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣}{\text{س} - ١}$

١٥ - $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + ٧\,\text{س} + ١٢}$ ، ١٦ - $\underset{\text{و} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{و}^{٢} - ٣\,\text{و} + ٢}{\text{و} - ٢}$

١٧ - $\underset{\text{ص} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ص}^{٢} + ٤\,\text{ص} + ٣}{\text{ص} + ٣}$ ، ١٨ - $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٣}$

١٩ - $\underset{\text{ص} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ص}^{٢} - ١}{\text{ص} - ١}$ ، ٢٠ - $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س} + ٢}$

٢١ - $\lim\limits_{ص \to ٣} \dfrac{ص^{٣} - ٢٧}{ص - ٣}$ ، ٢٢ - $\lim\limits_{ل \to ١} \dfrac{ل^{٢} + ٢\,ل - ٣}{ل^{٢} - ٥\,ل + ٤}$

٢٣ - $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{١}{٣\,س} \left(\dfrac{١}{س + ٨} - \dfrac{١}{٨} \right)$

٢٤ - $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{١}{س^{٢}} \left(\dfrac{٢}{س - ٥} - \dfrac{٢}{س^{٢} + س - ٥} \right)$

٢٥ - $\lim\limits_{س \to +\infty} \dfrac{٣\,س + ١}{٨\,س + ٢}$ ، ٢٦ - $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{٣\,س + ١}{٨\,س + ٢}$

٢٧ - $\lim\limits_{س \to +\infty} \dfrac{س + ١}{س^{٢} + ١}$ ، ٢٨ - $\lim\limits_{ك \to +\infty} \dfrac{ك + ٣}{٣\,ك^{٢} - ٢}$

٢٩ - $\lim\limits_{ك \to +\infty} \dfrac{٣\,ك^{٢} - ٢}{ك + ٣}$ ، ٣٠ - $\lim\limits_{ك \to -\infty} \dfrac{٣\,ك^{٢} - ٢}{ك + ٣}$

٣١ - $\lim\limits_{س \to +\infty} \dfrac{٣\,س^{٢} - ٦\,س}{٨\,س^{٢} + ٣}$ ، ٣٢ - $\lim\limits_{س \to +\infty} \dfrac{٢\,س + ١٢}{س^{٢} + س + ١}$

٣٣ - $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{-س^{٢} - ٣\,س + ٢}{٥\,س^{٢} + ٣\,س - ١}$ ،

٣٤ - $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{٥\,س^{٣} + ٢\,س^{٢} - ٧\,س + ٩}{٩\,س^{٣} - ٨\,س^{٢} + ٩\,س - ١٦}$

٣٥ - $\lim\limits_{س \to -\infty} ٣^{\frac{١}{س}}$ ، ٣٦ - $\lim\limits_{ص \to +\infty} \dfrac{ص - ١}{٢ - ٢^{\frac{١}{ص}}}$

٣٧ - $\lim\limits_{س \to +\infty} \dfrac{(١٢)^{س}}{س}$ ، ٣٨ - $\lim\limits_{س \to ٠} ٢\,س \text{ حتا } س$

٣٩ - $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{حا } س}{٥\,س}$ ، ٤٠ - $\lim\limits_{ك \to } \dfrac{\text{حا } ٥\,ك}{ك}$

٤١ - $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{حا} \left(\frac{٤\,س}{٥} \right)}{س}$ ، ٤٢ - $\lim\limits_{ص \to ٠} \dfrac{\text{حا } ٥\,ص}{\text{حا } ص}$

٤٣ - $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}^{٢}\,\text{س}}{\text{س}}$ ، ٤٤ - $\underset{\text{س} \leftarrow }{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}^{٢}\,\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

٤٥ - $\underset{\text{س} \leftarrow +\infty}{\text{نهـا}} \displaystyle\int_{١}^{\text{س}} \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ص}^{٢}}$ ، ٤٦ - $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}}$

٤٧ - $\underset{\text{س} \leftarrow (\frac{\text{ط}}{٢})^{+}}{\text{نهـا}} \text{ظا س}$ ، ٤٨ - $\underset{\text{س} \leftarrow (\frac{\text{ط}}{٢})}{\text{نهـا}} \text{ظا س}$

٤٩ - $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا س}}{\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}}$ ، ٥٠ - $\underset{\text{ص} \leftarrow \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نهـا}} (\frac{\text{ط}}{٢} - \text{ص})\ \text{ظا ص}$

٥١ - $\underset{\text{ل} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{ل} + ٣} - \sqrt{٣}}{\text{ل}}$ ، ٥٢ - $\underset{\text{ل} \leftarrow }{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٣ + \text{ل}} - \sqrt[٣]{٣}}{\text{ل}}$

٥٣ - $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣} - ٢}$ ، ٥٤ - $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٧} - ٤}$

٥٥ - $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ - \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١٦}}{\text{س}^{٣} + ١}$ ، ٥٦ - $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٥}{٢\,\text{س} - ٧}$

أجوبة التمارين

١) ١٣
٢) ٣
٣) صفر
٤) -٦
٥) $\frac{١}{٢}$
٦) $\frac{٦}{٥}$
٧) ١٥
٨) ٣
٩) صفر
١٠) $\frac{٣}{٥}$
١١) ٤
١٢) -٢
١٣) -٩
١٤) ٤
١٥) ١
١٦) ١
١٧) -٢
١٨) $\frac{٣}{٢}$
١٩) ٣
٢٠) ١٢
٢١) ٢٧
٢٢) $\frac{-٤}{٣}$
٢٣) $\frac{-١}{١٩٢}$
٢٤) $\frac{٢}{٢٥}$
٢٥) $\frac{٣}{٨}$
٢٦) $\frac{٣}{٨}$
٢٧) صفر
٢٨) صفر
٢٩) $+\infty$
٣٠) $-\infty$
٣١) $\frac{٣}{٨}$
٣٢) صفر
٣٣) $\frac{-١}{٥}$
٣٤) $\frac{٥}{٩}$
٣٥) ١
٣٦) $-\infty$
٣٧) صفر
٣٨) صفر
٣٩) $\frac{١}{٥}$
٤٠) ٥
٤١) $\frac{٤}{٥}$
٤٢) ٥
٤٣) صفر
٤٤) ١
٤٥) ١
٤٦) ١
٤٧) $-\infty$
٤٨) $+\infty$
٤٩) ١
٥٠) ١
٥١) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
٥٢) $\frac{\sqrt[٣]{٩}}{٣}$
٥٣) ٤
٥٤) ٨
٥٥) $\frac{١}{٢٤}$
٥٦) $-\frac{٥}{٧}$

ملحق ٲ : المجموعات ، المتباينات ، القيم المطلقة

تعريف ٲ ــ ١ :

إذا كان س عدد حقيقى ، فإن

| س | = س إذا كان س > صفر
| س | = — س إذا كان س < صفر
| س | = صفر إذا كان س = صفر

خاصية ٲ ــ ١ : خواص المتباينات :

إذا كانت ٲ ، ب ، حـ أعدادا حقيقية ، فإن

١ : ٲ < ب ⇐ ٲ + حـ < ب + حـ
٢ : ٲ < ب ، حـ > صفر ⇐ ٲ حـ < ب حـ
٣ : ٲ < ب ، حـ < صفر ⇐ ٲ حـ > ب حـ

نظرية ٲ ــ ١ :

إذا كان س ، ص عددان حقيقيان ، فإن :

١ : | س | ≥ صفر
٢ : | س | ≥ س
٣ : | س | ≥ — س
٤ : | س ص | = | س | | ص |
٥ : | س + ص | ≤ | س | + | ص |
٦ : | س — ص | ≥ | س | — | ص |

البرهـــان :

٤ : الحالة الأولى :

س ص ≥ صفر

إذن إما س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ؛ أو س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ .

للاحتمال الأول ، | س | = س ، | ص | = ص ، وبالتالى فإن

| س | | ص | = س ص

للاحتمال الثانى ، |س| = — س ، |ص| = — ص ، وبالتالى فإن

|س| |ص| = (— س) (— ص) = س ص

ولكن حيث أن س ص > ٠ ، فإن |س ص| = س ص ، ومن ثم نكون قد حصلنا على

|س ص| = |س| |ص| لكل س ، ص كما هو مطلوب للحالة الأولى .

الحالة الثانية :

س ص < صفر

إذن إما س < ٠ ، ص > ٠ ، أو س > ٠ ، ص < ٠

للاحتمال الأول ، |س| = — س ، |ص| = ص ، وبالتالى فإن |س| |ص| = — س ص

للاحتمال الثانى ، |س| = س ، |ص| = — ص ، وبالتالى فإن |س| |ص| = — س ص

ولكن حيث أن س ص < ٠ ، فإن |س ص| = — س ص ، ومن ثم نكون قد حصلنا على

|س ص| = |س| |ص| لكل س ، ص كما هو مطلوب للحالة الثانية .

٥ : الحالة الأولى :

س + ص ≤

إذن

|س + ص| = س + ص

ومن (٢) ، |س| ≤ س ، |ص| ≤ ص ، وبالتالى ينتج أن

|س| + |ص| ≤ س + ص = |س + ص|

الحالة الثانية :

س + ص > ٠

إذن

|س + ص| = — (س + ص)

ومن (٣) ، |س| ≤ — س ، |ص| ≤ — ص ، وبالتالى ينتج أن

|س| + |ص| ≤ — س — ص = — (س + ص) = |س + ص|

إذن ،

|س + ص| ≥ |س| + |ص| لكل س ، ص

٦ : الحالة الأولى :

س ≤ ٠

إذن |س| = س . أيضا ، من (٢) ، |ص| ≤ ص ، والذى يكافىء — |ص| ≥ — ص .

من هذا ينتج أن

$$|س| - |ص| \geq س - ص$$

ولكن من (٢)

$$س - ص \leq |س - ص|$$

إذن فى هذه الحالة ينتج أن

$$|س - ص| \geq |س| - |ص| \quad \text{لكل } س ، ص$$

الحالة الثانية :

$$س < ٠$$

إذن $|س| = -س$

أيضا ، من (٣) ، $|ص| \geq -ص$ ، والذى يكافىء $-|ص| \leq ص$

من هذا ينتج أن

$$|س| - |ص| \leq -س + ص = -(س - ص) ،$$

ولكن من (٣) ،

$$-(س - ص) \leq |س - ص|$$

إذن فى هذه الحالة ينتج أن

$$|س - ص| \geq |س| - |ص| \quad \text{لكل } س ، ص$$

نظرية أ ــ ٢ :

إذا كان $|س - ص| < حـ$ ، فإن $ص - حـ < س < ص + حـ$ وبالعكس .

البرهــان :

أولا ، إفرض أن $|س - ص| < حـ$. باستخدام (٢) من نظرية أ ــ ١ ، أى $|س - ص| \geq س - ص$ ؛ ينتج أن $س - ص < حـ$.

وبإستخدام (٣) من نفس النظرية ، أى $|س - ص| \geq -(س - ص)$ ، ينتج أن $-(س - ص) < حـ$ ، ومن ثم $س - ص > -حـ$

وبالتالى نحصل على $-حـ < س - ص < حـ$

ومن هذه العلاقة ينتج أن

$$ص - حـ < س < ص + حـ$$

لإثبات العكس ، إفرض أن $ص - حـ < س < ص + حـ$

إذن ، $-حـ < س - ص < حـ$

إذا كان $س - ص > ٠$ ، فإن $|س - ص| = س - ص$

ومن ثم

$$|س - ص| < حـ$$

إذا كان س - ص < ٠ ، فإن

$$-|س - ص| = س - ص$$

ومن ثم

$$- حـ < - |س - ص|$$

والذى يكافىء $|س - ص| < حـ$

إذن ،

$$|س - ص| < حـ \text{ يكافىء } ص - حـ < س < ص + حـ$$

تعريف ٢ - ٢ :

تعرف الفترة المفتوحة من ٢ إلى ب على أنها مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث أن س تقع بين ٢ ، ب ، ويرمز لها بالرمز] ٢ ، ب [. أى أن

$$]٢ ، ب[= \{ س | ٢ < س < ب \}$$

تعريف ٢ - ٣ :

تعرف الفترة المغلقة من ٢ إلى ب على أنها مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث أن س تكون أكبر من أو تساوى ٢ وأصغر من أو تساوى ب ، ويرمز لها بالرمز [٢ ، ب] . أى أن

$$[٢ ، ب] = \{ س | ٢ \leq س \leq ب \}$$

٢ - ١ :

يمكن كتابة $|س| < ٢$ كالآتى $|س - ٠| < ٢$. وباستخدام نظرية ٢ - ٢ تصبح هذه ٠ - ٢ < س < ٢ + ٠ ، والتى تكافىء أن نقول س ∈ $ج_٢$ (٠) أو س ∈]-٢ ، ٢[.

إذا كان $|س| < ٥$ ، فإنه يمكن كتابتها على الصورة |س - ٠| .... وبإستخدام نظرية ٢ - ٢ تصبح هذه .... < س < ... ، والتى تكافىء أن نقول س ∈ ج( ) أو س ∈ [،]

إذا كان $|س| < ٥$ ، فإنه يمكن كتابتها على الصورة $|س - ٠| < ٥$. وبإستخدام نظرية ٢ - ٢ تصبح هذه ٠ - ٥ < س < ٥ + ٠ ، والتى تكافىء أن نقول س ∈ $ج_٥$ (٠) أو س ∈]-٥ ، ٥[.

---

٢ - ٢ :

إذا كان $|س - ٣| < ٢$ ،فبإستخدام نظرية ٢ - ٢ يمكن كتابتها على الصورة ٣ - ٢ < س < ٣ + ٢ . والتى تكتب أيضا س ∈ $ج_٢$ (٣) أو س تنتمى إلى الفترة المفتوحة]١ ، ٥[.

إذا كانت | س — ٣ | < ١ ، فبإستخدام نظرية أ — ٢ يمكن كتابتها على الصورة
.... < .... < .... وتكتب أيضا س ∈ ج ( ) أو س ∈] ، [.

إذا كانت | س — ٣ | < ١ ، فبإستجدام نظرية أ — ٢ يمكن كتابتها على الصورة
٣ — ١ < س < ٣ + ١ . وتكتب أيضا س ∈ ج١ (٣) أو س ∈] ٢ ، ٤ [.

أ — ٣ :

إذا كانت س ∈ ج١/٢ (٦) ، فإن .... < س < .... ، | س — .... | < ..... أيضا ، س تنتمى إلى الفترة المفتوحة] ١١/٢ ، ١٣/٢ [.

إذا كانت س ∈ ج١/٢ (٦) ، فإن ٦ — ١/٢ < س < ٦ + ١/٢ ، | س — ٦ | < ١/٢

أ — ٤ :

إذا كانت | س + ٣ | < ١ ، فإن س ∈ ج١ (— ٣) ، .... < س < .....

(— ٣) — ١ < س < (— ٣) + ١

أ — ٥ :

إذا كانت | س + ٢ | < ١ ، فإن س تنتمى إلى الفترة المفتوحة] ، [.

] — ٣ ، — ١ [

أ — ٦ :

إذا أعطينا التقرير | س — ٥ | < ١ ، فيمكننا إثبات أن | س — ٤ | < ٢ .

إذا أعطينا :

| س — ٥ | < ١
⇐ ٤ < س < ٦ بإستخدام نظرية أ — ٢
⇐ ٤ — ٤ < س — ٤ < ٦ — ٤ بإستخدام خاصية أ — ١
⇐ ٠ < س — ٤ < ٢
⇐ | س — ٤ | < ٢ هذه الخطوة لايمكن عكسها .

إذن ، | س — ٥ | < ١ ⇐ | س — ٤ | < ٢ .

وهذا ليس غريبا حيث أن ٤ < س < ٦ يؤدى إلى أن ٢ < س < ٦ . إبدأ بالتقرير | س — ٥ | < ١ وبرهن أن | س + ٤ | < ١٠ .

البرهـــان :

| س — ٥ | < ١

⇐ ٤ < س < ٦ بإستخدام نظرية أ — ٢

⇐ ٤ + ٤ < س + ٤ < ٦ + ٤ بإستخدام خاصية أ — ١

⇐ | س + ٤ | < ١٠

أ — ٧ :

إشتق | س + ١ | < ٨ من | س + ٨ | < ١

| س + ٨ | < ١ ⇐ — ٩ < س < — ٧

⇐ — ٩ + ١ < س + ١ < — ٧ + ١ ⇐ — ٨ < س + ١ < — ٦

⇐ | س + ١ | < ٨ .

تلعب المعالجة المستخدمة فى الأطر القليلة السابقة دوراً هاما فى براهين الباب الثالث .

وسوف نعود الآن الى مناقشة الفترات المفتوحة والمغلقة ، والتى تلعب أيضا دوراً هاما فى مناقشتنا لمجالات الدوال القطعية .

تعريف أ — ٤ :

يعرف إتحاد المجموعة أ والمجموعة ب على أنه مجموعة كل العناصر س بحيث يكون س عنصر فى أ أو عنصر فى ب ، ويرمز له بالرمز أ ∪ ب . أى أن

أ ∪ ب = { س | س ∈ أ أو س ∈ ب }

تعريف أ — ٥ :

يعرف تقاطع المجموعة أ والمجموعة ب على أنه مجموعة كل العناصر س بحيث يكون س عنصر فى أ ، س عنصر فى ب ، ويرمز له بالرمز أ ∩ ب . أى أن

أ ∩ ب = { س | س ∈ أ و س ∈ ب }

أ ــ ٨ :

سنكتب] ــ ∞ ، حـ [لتعبر عن مجموعة كل الأعداد الحقيقية الأصغر من حـ و] حـ ، + ∞ [لتعبر عن مجموعة كل الأعداد الحقيقية الأكبر من حـ .

أى أن

] ــ ∞ ، حـ [= { س | س < حـ } ،
] حـ ، ∞ [= { س | س > حـ }

إذا كانت | س | > ٦ ، فإن س يمكن أن تقع فى الفترة] ــ ∞ ، ــ ٦ [أو فى الفترة] ٦ ، ∞ [. وهذا يعنى أن س < ــ ٦ أو س > ٦ . التقرير

س ∈] ــ ∞ ، ــ ٦ [∪] ٦ ، + ∞ [

يقرأ « س تنتمى إلى إتحاد الفترة المفتوحة من ــ ∞ إلى ــ ٦ والفترة المفتوحة من ٦ إلى + ∞ » .

إذا كانت | س | > ٥ ، فإن س يكون عنصر فى] ، [∪] ، [.

] ــ ∞ ، ــ ٥ [∪] ٥ ، + ∞ [

أ ــ ٩ :

إذا كانت | س | ≥ ٦ ، فإن س لا تنتمى إلى الفترة المغلقه [ــ ٦ ، ٦] . ولكن إذا كانت س تنتمى إلى الفترة المغلقة [ــ ٦ ، ٦] ، فإن س تنتمى إلى المجموعة { س | ــ ٦ < س < ٦ }

إذا كانت | س | > ٥ ، فإن س لا تنتمى إلى الفترة المغلقة [،]

[ــ ٥ ، ٥]

أ ــ ١٠ :

إذا كان س > ٥ أو س < ــ ٥ ، فإن | س | ....

| س | > ٥ .

أ ــ ١١ :

إذا كانت | س | = ٥ ، فإن س تنتمى للمجموعة ....

{ — ٥ ، ٥ } . أى أن ، س = ٥ أو س = — ٥ .

٢ — ١٢ : للمراجعة :

إذا كانت | س | = ٤ ، فإن س تنتمى إلى {   }
إذا كانت | س | > ٤ ، فإن س تنتمى إلى]   ،   [
إذا كانت | س | < ٤ ، فإن س تنتمى إلى]   ،   [∪]   ،   [
إذا كانت | س | ≥ ٤ ، فإن س تنتمى إلى [،   ]
إذا كانت | س | ≤ ٤ ، فإن س تنتمى إلى]   ،   ] ∪ [،   [

{ — ٤ ، ٤ } : س = — ٤ أو س = ٤
] — ٤ ، ٤ [: — ٤ > س > ٤
] — ∞ ، — ٤ [∪] ٤ ، + ∞ [: س < — ٤ أو س > ٤
[— ٤ ، ٤] : — ٤ ≥ س ≥ ٤
] — ∞ ، — ٤] ∪ [٤ ، + ∞ [: س ≤ — ٤ أو س ≥ ٤

٢ — ١٣ :

إذا كان مجال الدالة د هو مجموعة كل س بحيث أن س > ٢ و س < ٥ ، فإن مجال الدالة د يكون م~د~ =] ٢ ، + ∞ [∩] — ∞ ، ٥ [، وهذه هى الفترة المفتوحة] ٢ ، ٥ [. ما هو مجال الدالة ف ، إذا كان س ∈ م~ف~ عندما س > ١ و س < ٥ ؟

م~ف~ =] — ∞ ، ٥ [∩] ٢ ، + ∞ [=] ٢ ، ٥ [.

٢ — ١٤ :

إذا كان مجال الدالة د هو مجموعة كل س بحيث أن ٣ ≤ س ≤ ٥ أو س > ١٣ ، فما هى المجموعة المعرفة عليها الدالة ؟

م~د~ = [٣ ، ٥] ∪] ١٣ ، + ∞ [.

أ ــ ١٥ :

ما هو مجال الدالة المعرفة بالمعادلة

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - ٣}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٣)}$$

على مجموعة الأعداد الحقيقية ؟

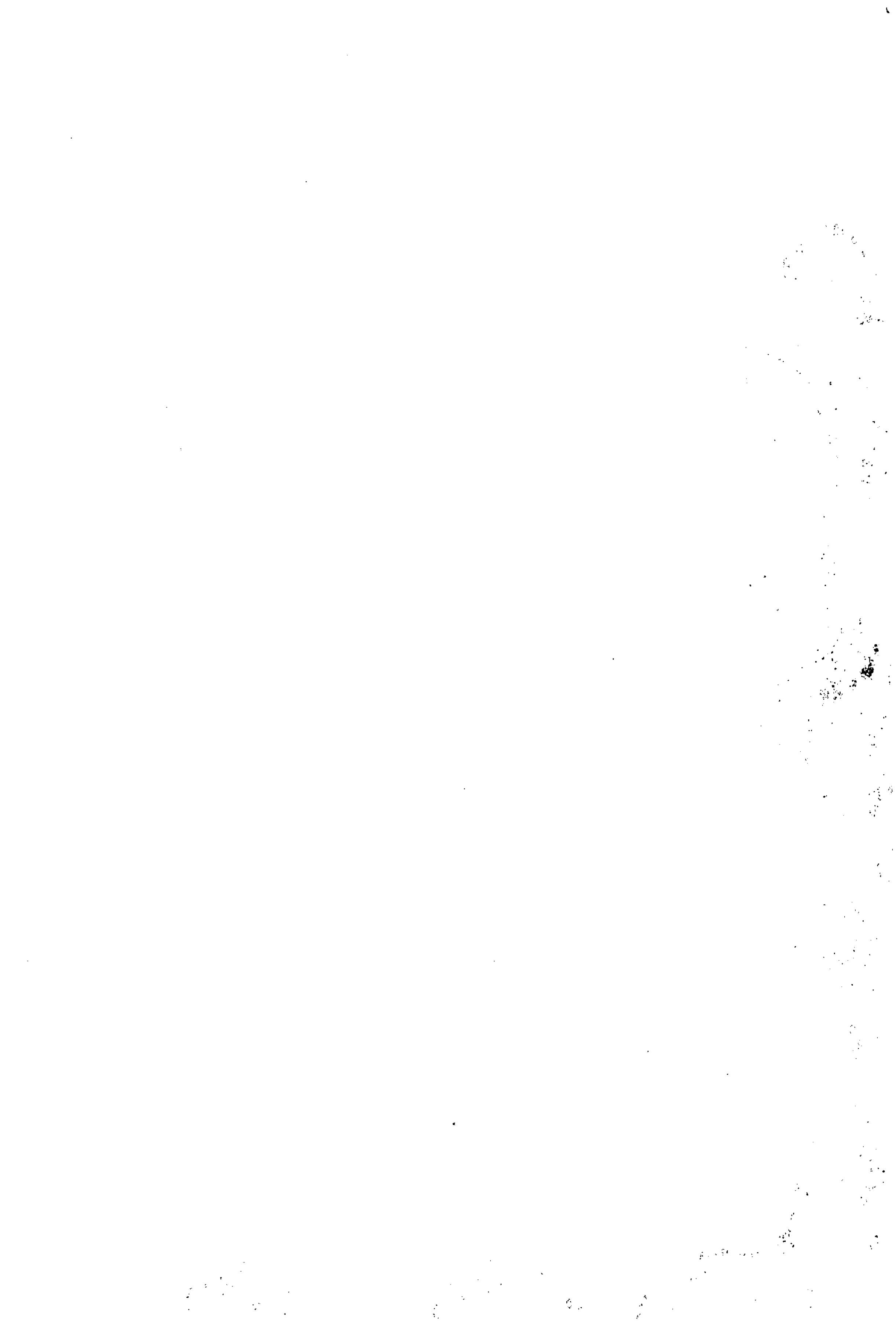
[— ∞ ، — ٢] ∪ [— ٢ ، ٣] ∪ [٣ ، + ∞]

أ ــ ١٦ :

ما هو مجال الدالة المعرفة بالمعادلة

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}(\text{س} - ٤)} \; ؟$$

[— ∞ ، صفر] ∪ [صفر ، ٤] ∪ [٤ ، + ∞]



قائمة المصطلحات

English	العربية
Absolute value	القيمة المطلقة
Achilles	أشيلس
Approaches	يقترب من
Archimedes	أرشميدس
Area	مساحة
Arithmetic combinations of functions	تركيبات حسابية للدوال
continuity of ...	اتصال تركيبات حسابية للدوال
limit of ...	نهاية تركيبات حسابية للدوال
Ball	كرة
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
differential ...	حساب التفاضل
integral ...	حساب التكامل
Challenger de fender game	لعبة المهاجم والمدفع
Chronon	الكرونون
Circular neighborhood	جوار دائرى
Circums cribed polygon	مضلع محيط بدائرة
Closed interval	فترة مغلقة
Closeness	القرب
Cluster point	نقطة تراكم
Common ratio	الاساس
Composite function	دالة محصلة (مركبة)
continuity of ...	اتصال دالة محصلة
limit of ...	نهاية دالة محصلة
Constant function	دالة ثابتة
Continuity	الاتصال
... at a point	الاتصال عند نقطة
Convergence	التقارب
Co sine	جيب التمام
Definite integral	التكامل المحدد
Deleted neighborhood	جوار مثقوب

Delta (δ)	دلتا
δ - neighbor hood	جوار نصف قطره δ
Dependent variable	متغير تابع
Derivative	مشتقة
Discontinuity	عدم الاتصال
Domain	مجال
... of a function	مجال دالة
... of a mapping	مجال راسم
... of a sequence	مجال متتابعة
Epsi lon (ε)	ابسيلون
ε - neighbor hood	جوار نصف قطره ε
Exploration	استكشاف
Fundamental theorem of cal culus	النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل
Geometric progression	متوالية هندسية
Geometric sequence	متتابعة هندسية
Geometric series	متسلسلة هندسية
Image	صورة
Increase without bound	يزداد دون حد
... to left	يزداد إلى اليسار دون حد
... to right	يزداد إلى اليمين دون حد
Independent variable	متغير مستقل
Infinite	لانهائى
... sequence	متتابعة لانهائية
... series	متسلسلة لانهائية
Infinitesimal	متناهى فى الصغر
Inscribed polygon	مضلع محاط بدائرة
Integer	عدد صحيح
Intersection	تقاطع
Interval	فترة
Limit	نهاية
infinite ...	نهاية لانهائية
left -hand ...	النهاية من اليسار
right -hand ...	النهاية من اليمين

Limit point	نقطة نهاية
Lower sum	المجموع السفلى
Natural number	عدد طبيعى
Neighborhood	جوار
Number line	خط الأعداد
Open interval	فترة مفتوحة
Ordered pair	زوج مرتب
Ordered set	فئة (مجموعة) مرتبة
Partial sums	المجاميع الجزئية
Polynomial function	دالة كثيرة الحدود
Product function	دالة حاصل الضرب
Programmed exercises	تمارين مبرمجة
Quo tient function	دالة خارج القسمة
Rational function	دالة كسرية
Right side limit	النهاية من اليمين
Sequence	متتابعة
limit of ...	نهاية متتابعة
... of partial sums	متتابعة مجاميع جزئية
Series	متسلسلة
sum of ...	مجموع متسلسلة
Sine	الجيب
Sum	مجموع
.... of geometric series	مجموع متسلسلة هندسية
Tangent functions	دوال التماس
Tangent line	الخط المماس
Uniqueness of a limit	وحدانية النهاية
Upper sum	المجموع العلوى
Zeno of Elea	زينو من بلدة إليا

رقم الإيداع ١٩٨٨/٨٣١٨


مطابع المكتب المصرى الحديث
MODERN EGYPTIAN PRESS

محمد ابو يوسف اللموشي

صدر أيضا للناشر
فى الرياضيات

* الميكانيكا العامة وتطبيقاتها (شوم)	Spiegel
* حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية	Durfee
* المعادلات التفاضلية (شوم)	Ayres
* حساب التفاضل والتكامل (شوم)	Ayres
* التفاضل والتكامل المتقدم (شوم)	Spiegel
* الجبر الخطى (شوم)	Lipschutz
* بحوث العمليات (شوم)	Bronson
* تحليل المتجهات (شوم)	Spiegel
* الدوال المركبة (شوم)	Spiegel
* الإحصاء (شوم)	Spiegel
* الإحتمالات (شوم)	Lipschutz
* التحليل العددى (شوم)	Scheid
* المصفوفات (شوم)	Ayres
* المتغيرات المركبة وتطبيقاتها	Churchill
* الرياضيات المتقدمة للمهندسين (شوم)	Spiegel
* الرياضة لدارسى العلوم الحيوية	Arya
* الرياضة لدارسى العلوم الحيوية (١)	Arya
* الرياضة لدارسى العلوم الحيوية (٢)	Arya
* الرياضيات والإحصاء لدراسات المحاسبة	Bancroft
* طرق الحسابات	Cunnington

محمد ابو يوسف اللموشي

تطلب من :

– الناشر :

الدار الدولية للنشر والتوزيع

٣٨ ش الأهرام – روكسى

ص. ب. : ٥٥٩٩ هليوبولس غرب – القاهرة

تليفون : ٢٥٨٢٨٨٧

تلكس : ٢٠٨١٥ PBESC UN

– جميع المكتبات الكبرى بمصر والعالم العربى

ISBN : 36961

Cover Designer
HAMDI KANDIL